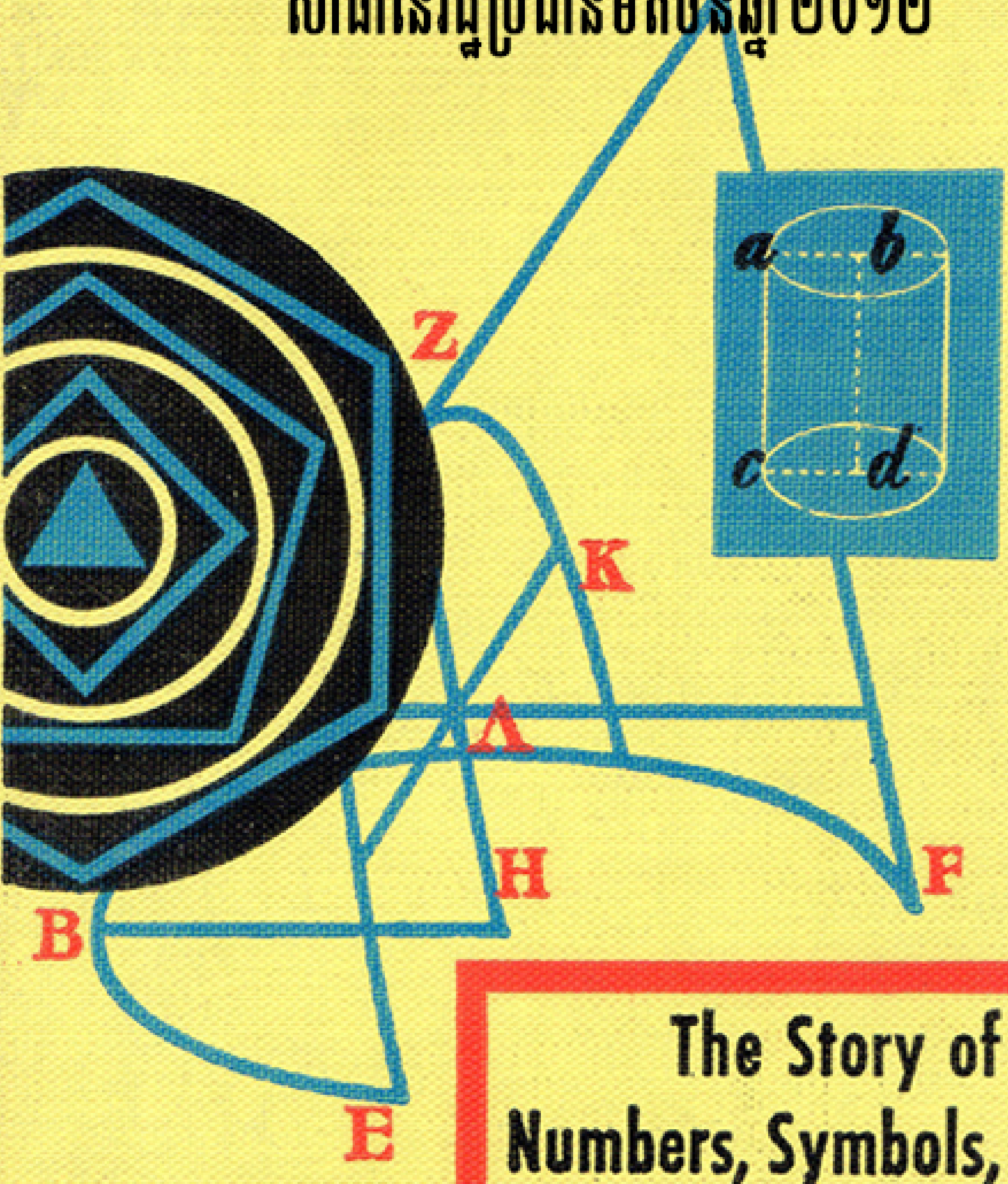
វិញ្ញាសារ

ប្រឡងជ្រើសរើសនិស្សិតអាហារូបករណ៍ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រទៅសិក្សានៅ សាធានេរដ្ឋប្រជានិមិតចិនឆ្នាំ២០១២



The Story of Numbers, Symbols, Space

វិញ្ញាសាទី ១

ប្រឡងជ្រើសរើសនិស្សិតអាហារូបករណ៍ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រនៅសិក្សា

នៅសាធារណៈរដ្ឋប្រជាមានិតចិនក្នុងឆ្នាំ ២០១២

សម័យប្រឡង: ១៦ កុម្ភៈ ២០១២

រយៈពេល ១ ម៉ោង ៣០ នាទី

I. (**២៥ពិន្ទុ**) ១. គណនា $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

២. គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+5x-2})$

៣. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x[\ell n(x+2)-\ell nx]\}$

II. (**២៥ពិន្ទុ**) ១. គេឲ្យ $y=\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$

ក. សរសេរ y ជារាង $y=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$ ដែល A,B,C ជាចំនួនថេរត្រូវកំណត់ ។

ខ. រកសំណុំព្រីមីទីវនៃ y ។

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ មានព្រីមីទីវដែលមានរាង $F(x)=Ax+B\,\ell n|c\sin x+d\cos x|+K$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរជាអនុគមន៍នៃ a,b,c,d ។

III. (**២៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 9y''+y=0$

១. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

២. កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(0)=3$ និង $f'(0)=\sqrt{3}$ ។

៣. រកតម្លៃ A,B ដោយដឹងថា $f(x)=A\cos\left(\dfrac{x}{3}+B\right)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$

IV. (**២៥ពិន្ទុ**) គេមានថង់ពីរផ្សេងគ្នាគឺ I, II ។ ថង់ I មានប៊ូលពណ៌ស 7 និងពណ៌ក្រហម 3 ។ ថង់ II មានប៊ូលពណ៌ស 2 និងពណ៌ក្រហម 4 ។ គេទាញយកប៊ូលមួយដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីឲ្យបានប៊ូលចេញពីថង I មានពណ៌ស ។

អត្រាកំណែ

I. ១. គណនា $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1}$ មានរាង $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin^2 x - 2) - (3\sin x - 3)}{4\sin^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2(\sin x - 1)(\sin x + 1) - 3(\sin x - 1)}{4\sin^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x - 1)}{(2\sin x + 1)(2\sin x - 1)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - 1}{2\sin x + 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2 \times \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{1 - 2}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} = -\dfrac{1}{4}}$

២. គណនា $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 5x - 2})$ មានរាង $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 5x - 2})$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x^2 - 3x + 1) - (x^2 + 5x - 2)}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 5x - 2}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x - 5x + 1 + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 5x - 2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-8x+3}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(-8+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left[\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$$

ករណី $x\to+\infty$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-8+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left[\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-8+\frac{3}{x}\right)}{\left[\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right]} = -\frac{8}{2} = -4$$

ករណី $x\to-\infty$

គេបាន $\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-8+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left[\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(-8+\frac{3}{x}\right)}{\left[\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right]} = \frac{8}{2} = 4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+5x-2}) = \pm 4}$

៣. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x[\ell n(x+2)-\ell nx]\}=\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ell n\left(\frac{x+2}{x}\right)]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ell n\left(\frac{x+2}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\ell n\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2$$

$=\ell ne^2=2$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\{x[\ell n(x+2)-\ell nx]\}=2}$

II. ១. គេឲ្យ $y=\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$

ក. សរសេរ y ជារាង $y=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$

គេមាន $y=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{(B+C)x^2+(A+B-2C)x+(2A-2B+C)}{x^3-3x+2}$$

តែ $y=\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$

គេបាន $\begin{cases}B+C=3\\A+B-2C=3\\2A-2B+C=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=2\\C=1\end{cases}$

គេបាន $y=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}$

ដូចនេះ $\boxed{y=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}}$

ខ. រកសំណុំព្រីមីទីវនៃ y

$$F(x)=\int y\,dx=\int\left(\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=-\frac{3}{x-1}+2\ell n|x-1|+\ell n|x+2|+C$$

$$=-\frac{3}{x-1}+\ell n|(x-1)^2(x+2)|+C\ ,\ (C\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=-\frac{3}{x-1}+\ell n|(x-1)^2(x+2)|+C\ ,\ (C\in\mathbb{R})}$

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ មានព្រីមីទីវដែលមានរាង

$F(x)=Ax+B\,\ell n|c\sin x+d\cos x|+K$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរ

ជាអនុគមន៍នៃ a,b,c,d ។

បើ $F(x)=Ax+B\,\ell n|c\sin x+d\cos x|+K$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លុះត្រា

តែ $F'(x)=f(x)$ ។

ដោយ $F'(x)=A+B\cdot\dfrac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x}$

$$=\frac{(Ac-Bd)\sin x+(Ad+Bc)\cos x}{c\sin x+d\cos x}$$

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$

គេទាញបាន $\begin{cases}Ac-Bd=a\\ Ad+Bc=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\\ B=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{cases}$

ដូចនេះ $f(x)$ មានព្រីមីទីវ $F(x)=Ax+B\,\ell n|c\sin x+d\cos x|+K$

ដែល $A=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $B=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$ ។

III. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 9y''+y=0$

១. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

សមីការសម្គាល់ $9r^2+1=0$

$$9r^2=-1 \Leftrightarrow r=\pm\frac{1}{3}i$$

គេបានចម្លើយទូទៅមានរាង $y=A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$ ។

២. កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

គេមាន $f(x)=A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3}$

$$f'(x)=-\frac{A}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{B}{3}\cos\frac{x}{3}$$

ដោយដឹងថា $\begin{cases} f(0)=3 \\ f'(0)=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ \frac{B}{3}=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=3\sqrt{3} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=3\cos\frac{x}{3}+3\sqrt{3}\sin\frac{x}{3}}$

៣. រកតម្លៃ A,B ដោយដឹងថា $f(x)=A\cos\left(\frac{x}{3}+B\right)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$

គេមាន $f(x)=3\cos\frac{x}{3}+3\sqrt{3}\sin\frac{x}{3}$

$$=6\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{3}\right)=6\left(\cos\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=6\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

ដោយដឹងថា $f(x)=A\cos\left(\frac{x}{3}+B\right)$ នោះគេទាញបាន $A=6$ និង $B=-\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{A=6\ ,\ B=-\pi/3}$

IV. គេមានថង់ពីរផ្សេងគ្នាគឺ I, II ។ ថង់ I មានប៊ូលពណ៌ស 7 និងពណ៌ក្រហម 3 ។ ថង់ II មានប៊ូលពណ៌ស 2 និងពណ៌ក្រហម 4 ។ គេទាញយកប៊ូលមួយដោយចៃដន្យ គណនាប្រូបាបដើម្បីឲ្យបានប៊ូលចេញពីថង I មានពណ៌ស

I ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលប៊ូលចេញពីថង់ I

II ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលប៊ូលចេញពីថង់ II

A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលទាញបានប៊ូលពណ៌ស

A / I ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលទាញបានប៊ូលពណ៌សចេញពីថង់ I

A / II ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលទាញបានប៊ូលពណ៌សចេញពីថង់ II

គេមាន $P(I/A)=\dfrac{P(I\cap A)}{P(A)}$

ដោយ $P(I\cap A)=P(I)\times P(A/I)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{20}$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap I)+P(A\cap II)\\&=P(I)\times P(A/I)+P(II)\times P(A/II)\\&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{7}{20}+\frac{1}{6}=\frac{31}{60}\end{aligned}$$

នាំឲ្យ $P(I/A)=\dfrac{\frac{7}{20}}{\frac{31}{60}}=\dfrac{7}{20}\times\dfrac{60}{31}=\dfrac{21}{31}=0.677$

ដូចនេះ $\boxed{P(I/A)=0.677}$

វិញ្ញាសាទី ២

ប្រឡងជ្រើសរើសនិស្សិតអាហារូបករណ៍ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រទៅសិក្សា
នៅសាកលវិទ្យាល័យ DALI នៃសាធារណៈរដ្ឋ
ប្រជាមានិតចិនក្នុងឆ្នាំ ២០១១ -២០១២
សម័យប្រឡង: ០៥ សីហា ២០១១
រយៈពេល ១ ម៉ោង ៣០ នាទី

I. (**២៥ពិន្ទុ**) ក. គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោមៈ

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n + (-1)^n}{2n}$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{12}$

ខ. គណនាផលបូកខាងក្រោម

(1) $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2^n} + \dfrac{2}{3^n} \right)$

(2) $S_n = \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$

II. (**២៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{3x - 9}{x^2 - x - 2}$

ក. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតខ្សែកោងនៃអនុគមន៍

ខ. រក $f'(x)$ និងកំណត់ទីតាំងនៃចំណុចបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

គ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

III. (**២៥ពិន្ទុ**) គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{2x}{3}\sqrt{x} + 2$ នៅចន្លោះបន្ទាត់ $x = 0$ និង $x = 1$ ។

IV. (**២៥ពិន្ទុ**) គ្រាប់ឡុកឡាក់ល្អស្មើសាច់មួយត្រូវបានគេបោះចំនួន៦ដង ដែលការបោះមួយលើកៗគឺធ្វើឡើងដោយឯករាជ្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលបោះលើកទី១បានលេខគូ ។

ខ. តាង X ជាចំនួនដងដែលគេបោះបានលេខគូ ។ ចូររកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X ។

គ. គណនាប្រូបាបដែលគេបោះបានលេខគូយ៉ាងតិចពីរដង ។

អត្រាកំណែ

I. ក. គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{2n}$ មានរាង $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n+(-1)^n}{2n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{2}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{2n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{2n}=\dfrac{1}{2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{12}$

គេមាន $-1\le\sin\dfrac{n\pi}{12}\le1$ នាំឲ្យ $-\dfrac{1}{n}\le\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{12}\le\dfrac{1}{n}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)\le\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{12}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

ឬ $0\le\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{12}\le0$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{12}=0}$

ខ. គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$(1)\quad S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=3\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+2\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\left(3\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}\right)+\left(2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\right)$$

$$=3+1=4$$

ដូចនេះ $\boxed{S=4}$

$$(2)\quad S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{-1}{2(r+1)}+\frac{4}{2(r+2)}-\frac{3}{2(r+3)}\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{2(r+2)}-\frac{1}{2(r+1)}\right]+\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{3}{2(r+2)}-\frac{3}{2(r+3)}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{2(n+3)}\right]=\frac{1}{4}-\frac{2n+3}{2(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{1}{4}-\frac{2n+3}{2(n+2)(n+3)}}$

II. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x-9}{x^2-x-2}$

ក. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតខ្សែកោងនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-x-2\neq 0\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x\neq 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{3x-9}{x^2-x-2}=\frac{-12}{0}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x-9}{x^2-x-2}=\frac{-3}{0}=\pm\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ f ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-9}{x^2-x-2}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. រក $f'(x)$ និងកំណត់ទីតាំងនៃចំណុចបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

$$f'(x)=\frac{3(x^2-x-2)-(2x-1)(3x-9)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$=\frac{(3x^2-3x-6)-(6x^2-18x-3x+9)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$=\frac{-3x^2+18x-15}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-3(x^2-6x+5)}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-3(x-1)(x-5)}{(x^2-x-2)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{-3(x-1)(x-5)}{(x^2-x-2)^2}}$

បើ $f'(x)=0$, $\dfrac{-3(x-1)(x-5)}{(x^2-x-2)^2}=0$ គេបាន $x=1$, $x=5$

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

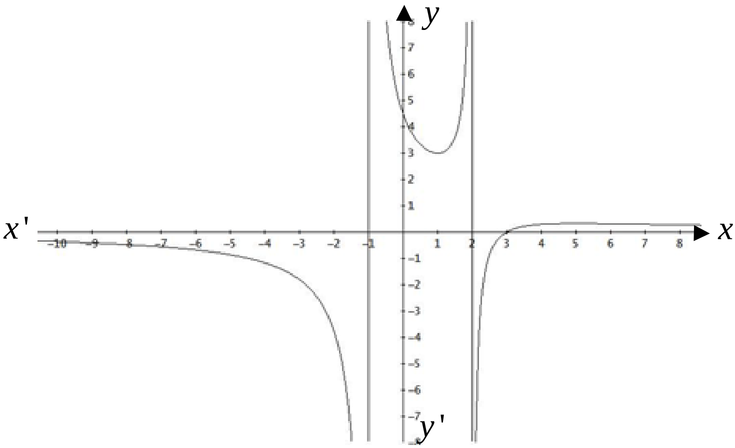
តាមតារាងសញ្ញាខាងលើគេបាន:

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមា ត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=3$

ហើយមានអតិបរមា ត្រង់ $x=5$ គឺ $f(5)=1/3$

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	3	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	$-\infty$

គ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍



III. គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x}{3}\sqrt{x} + 2$

តាមរូបមន្ត $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

ដោយ $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{x} = \sqrt{x}$

ហើយ $b = 1$, $a = 0$ គេបាន:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{L = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}\text{(ឯកតាប្រវែង)}}$

IV. (**២៥ពិន្ទុ**) គ្រាប់ឡុកឡាក់ល្អស្មើសាច់មួយត្រូវបានគេបោះចំនួន៦ដង ដែលការបោះមួយលើកៗគឺធ្វើឡើងដោយឯករាជ្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលបោះលើកទី១បានលេខគូ

លំហសំណាក $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ នោះ $n(S) = 6$

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលការបោះលើកទី១បានលេខគូ

គេបាន $A=\{2,4,6\}$ នោះ $n(A)=3$

នាំឲ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{2}}$

ខ. រកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X

តាង X ជាចំនួនដងដែលគេបោះបានលេខគូ

គេបាន $X(S)=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

តាមបម្រាប់គេបាន X មានបំណែងចែកទ្វេធាដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $n=6$ និង $p=\dfrac{1}{2}$

ដូច្នេះ $p(X=k)=C(6,k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$ ដែល $C(n,k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

និង $k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ។

គ. គណនាប្រូបាបដែលគេបោះបានលេខគូយ៉ាងតិចពីរដង

$$p(X\ge 2)=1-p(X<2)=1-p(X=0)-p(X=1)$$

$$=1-\frac{C(6,0)}{2^6}-\frac{C(6,1)}{2^6}=1-\frac{1}{2^6}-\frac{6}{2^2}=\frac{57}{64}$$

ដូចនេះ $\boxed{p(X\ge 2)=\dfrac{57}{64}}$

វិញ្ញាសាទី ៣

ប្រឡងជ្រើសរើសនិស្សិតអាហារូបករណ៍ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
នៅសិក្សានៅសហព័ន្ធរុស្ស៊ីក្នុងឆ្នាំ ២០១១
សម័យប្រឡង: ១០ ឧសភា ២០១១
រយៈពេល ១ ម៉ោង ៣០ នាទី

I. (**២៥ពិន្ទុ**) ១. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{5x-4}{x+3}$

ក. គណនា $f'(x)$

ខ. ទាញរកដេរីវេនៃ $g(x)=\dfrac{5\sin^2 2x-4}{\sin^2 2x+3}$

២. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $[-2,+\infty[$ ដោយ $f(x)=\sqrt{x+2}$ ។ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,\,2]$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ ។

II. (**២៥ពិន្ទុ**) ក. គណនា $I=\displaystyle\int_2^6\frac{3x}{x^2-3}dx$

ខ. គណនា $J=\displaystyle\int_0^{\pi/4}x\cos 2x\,dx$

គ. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីការវិលនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=x-1$ និងអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ ត្រូវនឹង $1\le x\le 4$ ជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ ។

III. (**២៥ពិន្ទុ**) តាមចំណុច $M(-3,12)$ គេគូសបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $(P):y^2=10x$ ។ គណនាចម្ងាយ d ពីចំណុច M ទៅអង្កត់ធ្នូដែលភ្ជាប់ចំណុចប៉ះទាំងពីរ ។

IV. (**២៥ពិន្ទុ**) ក្រុមហ៊ុនមួយត្រូវការជ្រើសរើសវិស្វករ០៤រូបសម្រាប់បម្រើការនៅការិយាល័យ៤ខុសៗគ្នា។ មានបេក្ខជន០៦នាក់ មកបង្ហាញខ្លួនដោយមានប្រុស៣ ស្រី៣ ។ តើគណកម្មការជ្រើសរើសអាចរៀបចំបញ្ជីបេក្ខជនដែលត្រូវទទួលយកបានប៉ុន្មានរបៀបៈ

ក. បើបេក្ខជន០៦នាក់នេះអះអាងថា គេអាចបម្រើការនៅការិយាល័យណាក៏បាន ។

ខ. បើមានបេក្ខជនតែម្នាក់គត់ដែលអាចបម្រើការនៅគ្រប់ការិយាល័យ ហើយបេក្ខជន ៥នាក់ទៀតអាចបម្រើការនៅការិយាល័យ៣ដែលនៅសល់ ។

អត្រាកំណែ

I. ១. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{5x-4}{x+3}$

ក. គណនា $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{5(x+3)-(5x-4)}{(x+3)^2}=\frac{5x+15-5x+4}{(x+3)^2}=\frac{19}{(x+3)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{19}{(x+3)^2}}$

ខ. ទាញរកដេរីវេនៃ $g(x)=\dfrac{5\sin^2 2x-4}{\sin^2 2x+3}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{5x-4}{x+3}$ នោះគេបាន $f(\sin^2 2x)=\dfrac{5\sin^2 2x-4}{\sin^2 2x+3}$

នាំឲ្យ $g(x)=f(\sin^2 2x)=\dfrac{5\sin^2 2x-4}{\sin^2 2x+3}$

តាមរូបមន្តដេរីវេបណ្តាក់ $g'(x)=(\sin^2 2x)'\,f'(\sin^2 2x)$

$$g'(x)=(4\cos 2x\cdot\sin 2x)\,f'(\sin^2 2x)$$

$$=(2\sin 4x)\times\frac{19}{(\sin^2 2x+3)^2}=\frac{38\sin 4x}{(\sin^2 2x+3)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x)=\dfrac{38\sin 4x}{(\sin^2 2x+3)^2}}$

២. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

គេមាន $f(x)=\sqrt{x+2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,\,2]$ គេបាន $-1\le x\le 2$

$1 \le x+2 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{x+2} \le 2$

$2 \le 2\sqrt{x+2} \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \le \frac{1}{2}$

នាំឲ្យ $\frac{1}{4} \le f'(x) \le \frac{1}{2}$

ដោយ $b = x$, $a = -1$ តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់គេបាន:

$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

$\frac{1}{4}(x+1) \le f(x) - f(-1) \le \frac{1}{2}(x+1)$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \le \sqrt{x+2} - \sqrt{-1+2} \le \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + 1 \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1$

$\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$

II. ក. គណនា

$$I = \int_2^6 \frac{3x}{x^2-3}dx = \frac{3}{2}\int_2^6 \frac{(x^2-3)'}{x^2-3}dx = \frac{3}{2}\ell n|x^2-3|\Big|_2^6$$

$$= \frac{3}{2}[\ell n(36-3) - \ell n(4-3)] = \frac{3}{2}\ell n(33)$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{3}{2}\ell n(33)}$

ខ. គណនា $J = \int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,dx$

តាង $u = x \Rightarrow du = dx$ និង $dv = \cos 2xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

តាមរូបមន្ត $\int udv = uv - \int vdu$

$$J=\int_0^{\pi/4}x\cos 2x\,dx=\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2x dx$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}(0-1)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}}$

គ. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីការវិលនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=x-1$ និងអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ ត្រូវនឹង $1\le x\le 4$ ជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$

$$V=\pi\int_1^4 f^2(x)\,dx$$

$$V=\pi\int_1^4(x-1)^2\,dx=\pi\int_1^4(x^2-2x+1)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_1^4=\pi\left[\left(\frac{64}{3}-16+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)\right]$$

$$=\pi\left(\frac{63}{3}-15+3\right)=\pi(21-15+3)=9\pi\text{ (ឯកតាមាឌ)}$$

ដូចនេះ $\boxed{V=9\pi\text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

III. គណនាចម្ងាយ d ពីចំណុច M ទៅអង្កត់ធ្នូដែលភ្ជាប់ចំណុចប៉ះទាំងពីរ

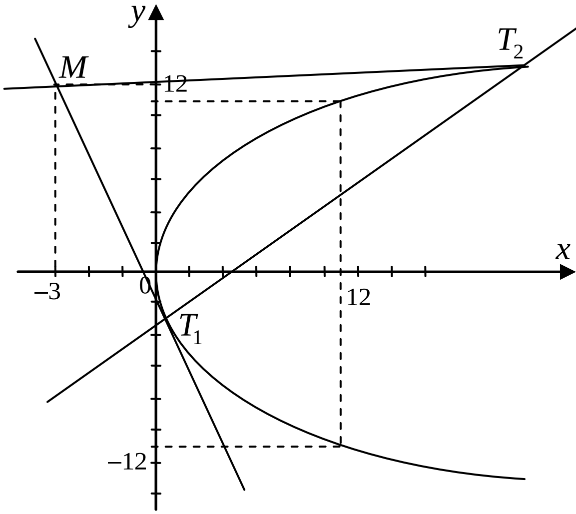
តាង $T_1(x_1,y_1)$ និង $T_2(x_2,y_2)$ ជាចំណុចប៉ះទាំងពីរគឺ (MT_1) និង (MT_2)

• សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(MT_1): y-y_1=y_1'(x-x_1)$

ដោយ $(-3,12)\in(MT_1)$ យើងបាន $12-y_1=y_1'(-3-x_1)$

តែ $y^2=10x\Rightarrow 2y'y=10\Leftrightarrow y'y=5$

ត្រង់ $T_1(x_1,y_1)$ គេបាន $y_1'=\frac{5}{y_1}$



នាំឲ្យ $12-y_1=\dfrac{5}{y_1}(-3-x_1)$

$12y_1-y_1^2=-15-5x_1$

$12y_1-10x_1=-15-5x_1$ (ព្រោះ $y_1^2=10x_1$)

$12y_1-5x_1+15=0$ (1)

• សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(MT_2):y-y_2=y'_2(x-x_2)$

ដោយ $(-3,12)\in(MT_2)$ យើងបាន $12-y_2=y'_2(-3-x_2)$

តែ $y^2=10x\Rightarrow 2y'y=10\Leftrightarrow y'y=5$

ត្រង់ $T_2(x_2,y_2)$ គេបាន $y'_2=\dfrac{5}{y_2}$

នាំឲ្យ $12-y_2=\dfrac{5}{y_2}(-3-x_2)$

$12y_2-y_2^2=-15-5x_2$

$12y_2-10x_2=-15-5x_2$ (ព្រោះ $y_2^2=10x_2$)

$12y_2-5x_2+15=0$ (2)

• សមីការបន្ទាត់ (T_1T_2): $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\quad(3)$

តាម $(1)\Rightarrow x_1=\dfrac{12y_1+15}{5}$

តាម $(2)\Rightarrow x_2=\dfrac{12y_2+15}{5}$

យក x_1, x_2 ជំនួសក្នុង (3) គេបានៈ (T_1T_2): $12y-5x+15=0$

គេបានចម្ងាយពី M ទៅអង្កត់នោះគឺ $d=\dfrac{|12(12)-5(-3)+15|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$

$$d=\frac{|144+15+15|}{\sqrt{169}}=\frac{174}{13}$$

ដូចនេះ $\boxed{d=\dfrac{174}{13}\text{ (ឯកតាប្រវែង)}}$

IV. រកចំនួនរបៀបដែលគណកម្មការជ្រើសរើសអាចរៀបចំបញ្ជីបេក្ខជនដែលត្រូវទទួលៈ

ក. បើបេក្ខជន០៦នាក់នេះអះអាងថា គេអាចបម្រើការនៅការិយាល័យណាក៏បាន

ចំនួនបញ្ជីបេក្ខជនដែលត្រូវយក ជាបន្សំ៤ធាតុ រើសក្នុងចំណោម៦ធាតុ

គេបាន $C(6,4)=\dfrac{6!}{4!2!}=\dfrac{6\times5}{2}=15$ របៀប

ដូចនេះ គណកម្មការអាចរៀបចំបញ្ជីបេក្ខជនដែលត្រូវទទួលបាន $\boxed{15\text{ របៀប}}$

ខ. បើមានបេក្ខជនតែម្នាក់គត់ដែលអាចបម្រើការនៅគ្រប់ការិយាល័យ ហើយបេក្ខជន ៥នាក់ទៀតអាចបម្រើការនៅការិយាល័យ៣ដែលនៅសល់

$$C(5,3)=\frac{5!}{2!3!}=\frac{4\times5}{2}=10\text{ របៀប}$$

ដូចនេះ គណកម្មការអាចរៀបចំបញ្ជីបេក្ខជនដែលត្រូវទទួលបាន $\boxed{10\text{ របៀប}}$

វិញ្ញាសាទី ៤

ប្រឡងជ្រើសរើសបេក្ខជនចូលរៀនថ្នាក់ឆ្នាំសិក្សាមូលដ្ឋានសម្រាប់

វិស័យសុខាភិបាលក្នុងឆ្នាំសិក្សា ២០០៩-២០១០

សម័យប្រឡង: ២៥ តុលា ២០០៩

រយៈពេល ១២០ នាទី

1. រកចំនួនចម្លាស់អាចបែងចែកបាននៃក្រុមអក្សរៈ

ក. A,A,G,E,E,E,M ខ. A,L,G,E,B,R,A

2. គណនាៈ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+3+\ell nx)$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2-\ell nx)$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-2\ell nx\right)$ ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x-1-5\ell nx)$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ell nx(\ell nx-3)]$ ច. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{\ell nx}\right)$

3. គេមាន $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ។

4. រកតម្លៃ c និង k ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,+\infty)$ ។

ក. $f(x)=\begin{cases}3x+7 & , x\le 4\\ kx-1 & , 4<x\end{cases}$ ខ. $f(x)=\begin{cases}x & , x\le 1\\ cx+k & , 1<x<4\\ -2x & , x\ge 4\end{cases}$

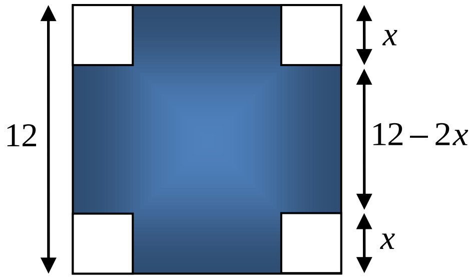
5. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយៈ

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & \text{បើ } x<1\\ 3x+2 & \text{បើ } x\ge 1\end{cases}\quad \text{ដែល } a,b\in\mathbb{R}$$

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ 1 ។ តើ f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ឬទេ?

6. ប្រអប់បើកមួយធ្វើពីក្រដាសកាតុងរាងជាការេមានជ្រុងស្មើនឹង $12dm$ ។ គេកាត់ការេ

ប៉ុនៗគ្នា នៅតាមជ្រុងកែងនីមួយៗរួចបត់មុខទាំងបួននោះ ។ រកមាឌធំបំផុតដែលអាចធ្វើបានតាមរបៀបនេះ ។



7. គណនាមាឌនៃសូលីតកំណត់ដោយការវិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរៈ

ក. $y=x^2$ និង $y=4x-x^2$

ខ. $y=6-2x-x^2$ និង $y=x+6$

គ. $y=3x+1$ និង $y=x^2+3$

ឃ. $y=x^2-2x+3$ និង $y=9-x$

8. គណនាលីមីតខាងក្រោមៈ

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1-\cos x)}{x}$

ង. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}$ ច. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)\right]$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin^2 \pi x}{x-1}\right)$ ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}$ ឈ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\right)$

9. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ ដែលមានខ្សែកោង (C) ។

ក. រកតម្លៃលេខនៃមេគុណ a,b និង c ដោយដឹងថាខ្សែកោង (C) កាត់តាមចំណុច

$A\left(0\,,\,\dfrac{3}{2}\right)$, $B(-1\,,\,0)$ និង $C(3\,,\,0)$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ ។

10.ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=0$ ។

ខ. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): y'+2y=x$ ។ រកចំនួនពិត a និង b ដែល អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (E_1) ។

គ. គេឲ្យ f ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ h កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $h(x)=f(x)+g(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E_1) ។

11.គណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[a,b]$ ដែលៈ

ក. $f(x)=x^2$ ដែល $[a,b]=[0,4]$, $n=4$ និង $C_1=0.5$, $C_2=1.5$ $C_3=2.5$, $C_4=3.5$ ។

ខ. $f(x)=9-x^2$ ដែល $[a,b]=[-3,2]$, $n=5$ និង $C_1=-2.5$ $C_2=-1.5$, $C_3=-0.5$, $C_4=0.5$, $C_5=1.5$ ។

គ. $f(x)=\sqrt{2-x}$ ដែល $[a,b]=[-2,2]$, $n=4$ និង $C_1=-1.5$ $C_2=-0.5$, $C_3=0.5$, $C_4=1.5$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ដែល $[a,b]=[-1,3]$, $n=4$ និង $C_1=-0.5$ $C_2=0.5$, $C_3=1.5$, $C_4=2.5$ ។

12.គេឲ្យ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ។ រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុចមួយ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ ឬបន្ទាត់ដូចខាងក្រោមៈ

ក. $(2,1,2)$ $\quad \vec{n}=\vec{i}$

ខ. $(3,2,2)$ $\quad \vec{n}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

គ. $(0,0,6)$ $\quad x=1-t, y=2+t, z=4-2t$

ឃ. $(0,2,-1)$ $\quad \vec{n}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

ង. $(2,4,5)$ $\quad x=5+t, y=1+3t, z=4t$

ច. $(0,0,0)$ $\quad \vec{n} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$

13.គណនាអាំងតេក្រាលៈ

ក. $\int x^3(2x-1)\,dx$ ខ. $\int x^2(3x-5)\,dx$

គ. $\int (3t+2)^2\,dt$ ឃ. $\int (5x+6)^2\,dx$

ង. $\int \sqrt{y}(y^2+2y-1)\,dy$ ច. $\int \sqrt{y}(4-3y-2y^2)\,dy$

ឆ. $\int \frac{3x^2+5x-4}{x^2}\,dx$ ជ. $\int \frac{x^3-6x^2+x}{x^2}\,dx$

ឈ. $\int \frac{4+\sqrt{x}-3x}{x}\,dx$ ញ. $\int \frac{5x^2-2x+3}{\sqrt{x}}\,dx$

ដ. $\int \frac{x^{\frac{3}{2}}+6-2xe^x}{x}\,dx$ ឋ. $\int \frac{4x^2+4\sqrt{x}-7x}{x^2}\,dx$

ចម្លើយ

1. រកចំនួនចម្លាស់អាចបែងចែកបាននៃក្រុមអក្សរៈ

ក. A, A, G, E, E, E, M

ចំនួនចម្លាស់គឺ $\frac{7!}{2!1!3!1!} = \frac{7\times6\times5\times4}{2} = \boxed{420 \text{ របៀប}}$

ខ. A, L, G, E, B, R, A

ចំនួនចម្លាស់គឺ $\frac{7!}{2!1!1!1!1!1!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3}{1} = \boxed{2520 \text{ របៀប}}$

2. គណនាៈ

ក. $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+3+\ell nx) = +\infty+\infty+3+\infty = +\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+3+\ell nx) = +\infty}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}(x+2-\ell nx) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{\ell nx}{x}\right) = +\infty(1+0-0) = +\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x+2-\ell nx) = +\infty}$

គ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-2\ell nx\right)=0-(+\infty)=-\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-2\ell nx\right)=-\infty}$

ឃ. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x-1-5\ell nx)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{5\ell nx}{x^2}\right)=+\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2-x-1-5\ell nx)=+\infty}$

ង. $\lim_{x\to+\infty}[\ell nx(\ell nx-3)]=+\infty(+\infty-3)=+\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}[\ell nx(\ell nx-3)]=+\infty}$

ច. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\ell nx}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ell nx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{\ell nx}{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\ell nx}\right)=+\infty}$

3. គណនា $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

ដោយ $[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1]\div(x-1)=(nx^n-x^{n-1}-...-x-1)$

$(x^{p+1}-x^p-x+1)\div(x-1)=x^p-1$

នាំឲ្យ $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{nx^n-x^{n-1}-...-x-1}{x^p-1}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

ចែកពហុធា:

$(nx^n-x^{n-1}-...-x-1)\div(x-1)$

$=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+2x+1$

$(x^p-1)\div(x-1)=(x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1)$

នាំឲ្យ $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+2x+1}{x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1}$

$$=\frac{n+(n-1)+(n-2)+...+2+1}{1+1+1+...+1}=\frac{n(n+1)}{2p}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=\dfrac{n(n+1)}{2p}}$

4. រកតម្លៃ c និង k ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,+\infty)$

ក. $f(x)=\begin{cases}3x+7\ ,\ x\le 4\\ kx-1\ ,\ 4<x\end{cases}$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=4$ លុះត្រាតែផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^-} f(x)=f(4)$$

$$4k-1=12+7\Leftrightarrow 4k=20\Leftrightarrow k=5$$

ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,+\infty)$ លុះត្រាតែ $\boxed{k=5}$ ។

ខ. $f(x)=\begin{cases}x & ,\ x\le 1\\ cx+k & ,1<x<4\\ -2x & ,\ x\ge 4\end{cases}$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ និង $x=4$ លុះត្រាតែផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8=4c+k\\ c+k=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-3\\ k=4\end{cases}$$

ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,+\infty)$ លុះត្រាតែ $\boxed{c=-3\ ,\ k=4}$

5. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយៈ

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & \text{បើ } x<1\\ 3x+2 & \text{បើ } x\ge 1\end{cases}\quad \text{ដែល } a,b\in\mathbb{R}$$

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ $x=1$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ កាលណាផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ f_+^{'}(1) = f_-^{'}(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(3x+2)-(3+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(ax^2+bx+1)-(a+b+1)}{x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3 = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{a(x-1)(x+1)+b(x-1)}{x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} [a(x+1)+b] = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases}$$

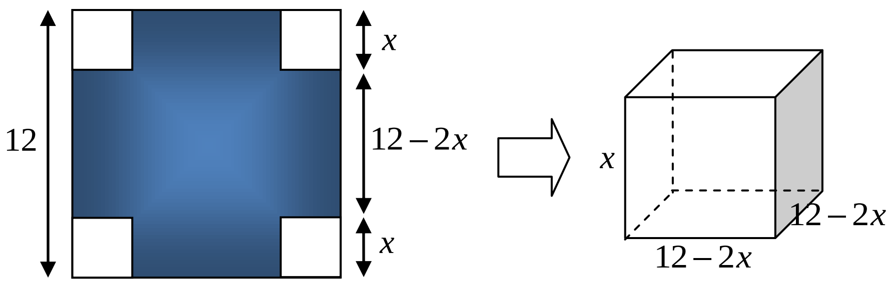
ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $\boxed{a=-1\,,\, b=5}$ ។

- តើអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?

ដោយ f ជាអនុគមន៍ពហុធា ហើយមានដេរីវេត្រង់ $x=1$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ។

6. រកមាឌធំបំផុតដែលអាចធ្វើបានតាមរបៀបនេះ



តាង x ជារង្វាស់ជ្រុងការេប៉ុនៗគ្នាដែលត្រូវកាត់ចោល

លក្ខខណ្ឌ $0<x<6$

មាឌនៃប្រអប់ $V=(12-2x)(12-2x)x=(144x-48x^2+4x^3)$

ដេរីវេ $V'=144-96x+12x^2$

បើ $V'=0$, $144-96x+12x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=6 \end{cases}$ (មិនយក)

x	0	2	6
V'	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	$V(2)$	$\searrow$

ចំពោះ $x=2\,dm$ គេបាន $V(2)=144\times 2-48\times 2^2+4\times 2^3=128\,dm^3$

ដូចនេះ មាឌធំបំផុតនៃប្រអប់នេះគឺ $\boxed{V=128\,dm^3}$

7. គណនាមាឌនៃសូលីតកំណត់ដោយការវិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរៈ

តាមរូបមន្ត $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$

ក. $y=x^2$ និង $y=4x-x^2$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងទាំងពីរគឺ

$x^2=4x-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$, $x=2$

ចំពោះ $x\in[0\,,\,2]$ គេបាន $4x-x^2\geq x^2$ នោះគេបានៈ

$$V=\pi\int_0^2[(4-x^2)^2-(x^2)^2]dx=\pi\int_2^2(16-8x^2)dx$$

$$=\pi\left(16x-\frac{8}{3}x^3\right)_0^2=\pi(32-\frac{64}{3})=\frac{32\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{V=\frac{32\pi}{3}\text{(ឯកតាមាឌ)}}$

ខ. $y=6-2x-x^2$ និង $y=x+6$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់គឺ

$6-2x-x^2=x+6 \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x=0\ ,\ x=-3$

ចំពោះ $x\in[-3\ ,\ 0]$ គេបាន $6-2x-x^2\geq x+6$ នោះគេបាន:

$$V=\pi\int_{-3}^{0}[(6-2x-x^2)^2-(x+6)^2]\,dx$$

$$=\pi\int_{-3}^{0}(36+4x^2+x^4-24x+4x^3-12x^2-x^2-12x-36)dx$$

$$=\pi\int_{-3}^{0}(x^4+4x^3-9x^2-36x)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+x^4-3x^3-18x^2\right)_{-3}^{0}=-\pi\left(-\frac{243}{5}+81+81-162\right)$$

$$=\frac{243\pi}{5}\text{(ឯកតាមាឌ)}$$

ដូចនេះ $\boxed{V=\frac{243\pi}{5}\text{(ឯកតាមាឌ)}}$

គ. $y=3x+1$ និង $y=x^2+3$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់គឺ

$3x+1=x^2+3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1\ ,\ x=2$

ចំពោះ $x\in[1\ ,\ 2]$ គេបាន $3x+1\geq x^2+3$ នោះគេបាន:

$$V=\pi\int_{1}^{2}[(3x+1)^2-(x^2+3)^2]\,dx$$

$$=\pi\int_{1}^{2}(9x^2+6x+1-x^4-6x^2-9)dx$$

$$=\pi\int_{1}^{2}(-x^4+3x^2+6x-8)\,dx=\pi\left(-\frac{x^5}{5}+x^3+3x^2-8x\right)_{1}^{2}$$

$$=\pi\left[\left(-\frac{32}{5}+8+12-16\right)-\left(-\frac{1}{5}+1+3-8\right)\right]$$

$$=\pi\left(-\frac{31}{5}+8\right)=\frac{9\pi}{5}\text{(ឯកតាមាឌ)}$$

ដូចនេះ $\boxed{V=\frac{9\pi}{5}\text{(ឯកតាមាឌ)}}$

ឃ. $y=x^2-2x+3$ និង $y=9-x$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់គឺ

$x^2-2x+3=9-x \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=-2\ ,\ x=3$

ចំពោះ $x\in[-2\ ,\ 3]$ គេបាន $9-x\geq x^2-2x+3$ នោះគេបានៈ

$$V=\pi\int_{-2}^{3}[(9-x)^2-(x^2-2x+3)^2]\,dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{3}[(81-18x+x^2)-(x^4+4x^2+9-4x^3-12x+6x^2)\,dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{3}(-x^4+4x^3-9x^2-6x+72)\,dx$$

$$=\pi\left(-\frac{x^5}{5}+x^4-3x^3-3x^2+72x\right)_{-2}^{3}$$

$$=\pi\left[\left(-\frac{243}{5}+81-81-27+216\right)-\left(\frac{32}{5}+16+24-12-144\right)\right]$$

$$=\pi\left(-\frac{275}{5}+189+116\right)=\pi\left(\frac{-275+305\times 5}{5}\right)=\frac{1250\pi}{5}=250\pi$$

ដូចនេះ $\boxed{V=250\pi\text{(ឯកតាមាឌ)}}$

8. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\sin^2(3x)}\times\frac{1}{9}=1\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}=\frac{1}{9}}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(1-\cos 4x)}{4x}=4\times 0=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x}=0}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x}=3\times 0=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x}=0}$

ង. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

តាង $u=x-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=u+\frac{\pi}{2}$

ពេល $x \to \frac{\pi}{2}$ នោះ $u \to 0$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = \lim_{u\to 0} \frac{\pi - 2\left(u + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{\pi - 2u - \pi}{-\sin u}$

$= 2\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 2\times 1 = 2$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = 2}$

ច. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \cos^2 x - 3\cos x}{x^2 \cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x - 2)}{x^2 \cos x} = -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \frac{\cos x - 2}{4\cos x}$

$= -2\times 1\times \frac{-1}{4} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right)\right] = \frac{1}{2}}$

ឆ. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin^2 \pi x}{x-1}\right)$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin^2 \pi x}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{[\sin \pi(x-1)]^2}{[\pi(x-1)]^2} \times \pi^2 (x-1) = 1\times 0 = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin^2 \pi x}{x-1}\right) = 0}$

ជ. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times x=1\times 0=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x}=0}$

ឈ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\right)$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)-\sin x}{(1-\cos x)-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\right)=-1}$

9. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$ ដែលមានខ្សែកោង (C)

ក. រកតម្លៃលេខនៃមេគុណ a,b និង c

ដោយដឹងថា (C) កាត់តាម $A\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\right)$, $B(-1\ ,\ 0)$ និង $C(3\ ,\ 0)$

គេបាន $\begin{cases} f(0)=\frac{3}{2} \\ f(-1)=0 \\ f(3)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -\frac{c}{2}=\frac{3}{2} \\ \frac{a-b+c}{-3}=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\,,\,b=-2\,,\,c=-3}$

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ ។

តាមតម្លៃ $a=1\,,\,b=-2\,,\,c=-3$ គេបាន $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$

• ដែនកំណត់ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

• ទិសដៅអថេរភាព

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x-3)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-6x+4-x^2+2x+3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+7}{(x-2)^2}$$

ដោយ $(x-2)^2>0,\forall x\in D_f$

នាំឲ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចពហុធា x^2-4x+7 ។

បើ $f'(x)=0\,,\;x^2-4x+7=0$

តែ $\Delta'=(-2)^2-7=-3<0$ នាំឲ្យ $x^2-4x+7>0$ ជានិច្ច $\forall x\in D_f$

ដូច្នេះ $\forall x\in D_f\,,\,f'(x)>0$ មានន័យថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែន D_f ហើយគ្មានចំណុចបរមាទេ ។

• លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3}{x-2}=\frac{-3}{0}=\pm\infty$$

នាំឲ្យបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f ។

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-3}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}=x+\dfrac{-3}{x-2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{3}{x-2}\right)=0$

ដូច្នេះ បន្ទាត់ $(d): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f ។

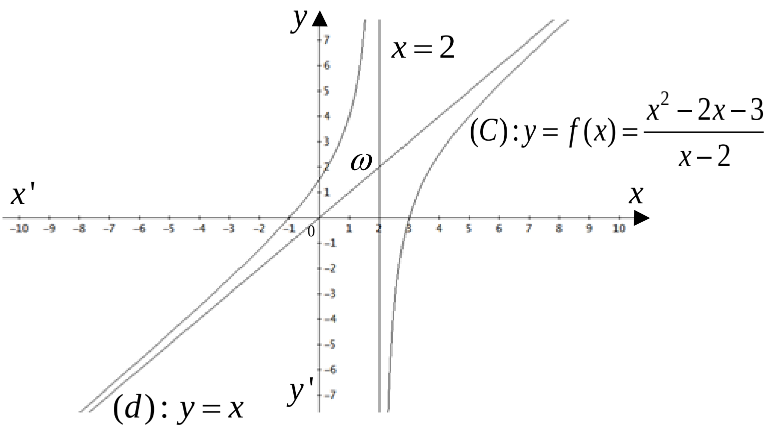
• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

• សង់ក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

រក $(C)\cap(x'ox): y=0$, $x=-1$, $x=3$

រក $(C)\cap(y'oy): x=0$, $y=3/2=1.5$



• ផ្ចិតឆ្លុះ

បម្លែងផ្ចិតពី $O(0,0)\mapsto\omega(2,2)$

តាមរូបមន្តប្តូរអ័ក្ស $\begin{cases} x = x_\omega + X \\ y = y_\omega + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$

គេបានសមីការបង្រួម $2+Y=\dfrac{(2+X)^2-2(2+X)-3}{2+X-2}$

$$2+Y=\frac{4+4X+X^2-4-2X-3}{X}$$

$$Y=\frac{X^2+2X-3}{X}-2=\frac{X^2+2X-3-2X}{X}=\frac{X^2-3}{X}$$

ឬ $F(X)=\dfrac{X^2-3}{X}$

ដោយ $F(-X)=\dfrac{(-X)^2-3}{-X}=-\dfrac{X^2-3}{X}=-F(X)$

នោះគេបាន F ជាអនុគមន៍សេស ។

ដូចនេះ ចំណុច $\omega(2,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

10.ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=0$ ។

មានរាងអូម៉ូសែនលំដាប់ទី១ គេបានចម្លើយទូទៅ $y=ke^{-2x}$ ដែល k ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ $y=ke^{-2x}$ ដែល $k\in\mathbb{R}$ ។

ខ. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): y'+2y=x$ ។

រកចំនួនពិត a និង b ដែល

អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (E_1)

$g(x)=ax+b \Rightarrow g'(x)=a$

យក $g(x)$ និង $g'(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E_1)

គេបាន $a+2(ax+b)=x$

$$2ax+a+2b=x\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\ a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\,,\,b=-\dfrac{1}{4}}$

គ. បង្ហាញថា $h(x)=f(x)+g(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E_1)

យើងមាន $(E_1): y'+2y=x$

បើ $h(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E_1) លុះត្រាតែ $h'(x)+2h(x)=x$

ដោយ $h'(x)+2h(x)=f'(x)+g'(x)+2f(x)+2g(x)$

ឬ $h'(x)+2h(x)=[f'(x)+2f(x)]+[g'(x)+2g(x)]$

តែ f ជាចម្លើយរបស់ (E) នាំឲ្យ $f'(x)+2f(x)=0$

$$g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2}$$

គេបាន $h'(x)+2h(x)=0+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=x$ (ពិត)

ដូចនេះ $h(x)=f(x)+g(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E_1) ។

11. គណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[a,b]$

អនុវត្តន៍តាមរូបមន្ត $S=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ដែល $\Delta x=\frac{b-a}{n}$

ក. $f(x)=x^2$ ដែល $[a,b]=[0,4]$, $n=4$ និង $C_1=0.5$, $C_2=1.5$ $C_3=2.5$, $C_4=3.5$

ដោយ $\Delta x=\frac{4-0}{4}=1$

គេបាន $S=[(0.5)^2+(1.5)^2+(2.5)^2+(3.5)^2]\times 1$

$=[(0.5)^2+(1.5)^2+(2.5)^2+(3.5)^2]\times 1$

$=0.25+2.25+6.25+12.25=21$

ដូចនេះ $\boxed{S=21(\text{ឯកតាផ្ទៃ})}$

ខ. $f(x)=9-x^2$ ដែល $[a,b]=[-3,2]$, $n=5$ និង $C_1=-2.5$ $C_2=-1.5$, $C_3=-0.5$, $C_4=0.5$, $C_5=1.5$ ។

ដោយ $\Delta x=\frac{2+3}{5}=1$

គេបាន

$$S=[9-(-2.5)^2+9-(-1.5)^2+9-(-0.5)^2+9-(0.5)^2+9-(1.5)^2]\times 1$$

$= 45-(6.25+2.25+0.25+0.25+2.25) = 33.75$

ដូចនេះ $\boxed{S = 33.75(\text{ឯកតាផ្ទៃ})}$

គ. $f(x)=\sqrt{2-x}$ ដែល $[a,b]=[-2,2]$, $n=4$ និង $C_1=-1.5$

$C_2=-0.5$, $C_3=0.5$, $C_4=1.5$

ដោយ $\Delta x=\dfrac{2+2}{4}=1$

គេបាន

$$S=[\sqrt{2-(-1.5)}+\sqrt{2-(-0.5)}+\sqrt{2-(0.5)}+\sqrt{2-(1.5)}]\times 1$$

$$=\sqrt{3.5}+\sqrt{2.5}+\sqrt{1.5}+\sqrt{0.5}$$

$$=1.870+1.581+1.225+0.707=5.383$$

ដូចនេះ $\boxed{S = 5.383(\text{ឯកតាផ្ទៃ})}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ដែល $[a,b]=[-1,3]$, $n=4$ និង $C_1=-0.5$

$C_2=0.5$, $C_3=1.5$, $C_4=2.5$ ។

ដោយ $\Delta x=\dfrac{3+1}{4}=1$

គេបាន $S=\left(\dfrac{1}{-0.5+2}+\dfrac{1}{0.5+2}+\dfrac{1}{1.5+2}+\dfrac{1}{2.5+2}\right)\times 1$

$$=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.5}$$

$$=0.666+0.400+0.285+0.222=1.573$$

ដូចនេះ $\boxed{S = 1.573(\text{ឯកតាផ្ទៃ})}$

12.គេឲ្យ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ។ រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុចមួយ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ ឬបន្ទាត់ដូចខាងក្រោមៈ

ប្រើរូបមន្ត $(P): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ ដែល (x_o,y_o,z_o)

ហើយ $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ ។

ក. $(2,1,2)$ $\qquad \vec{n}=\vec{i}$

គេបាន $(P):(x-2)+0(y-1)+0(z-2)=0 \Leftrightarrow (P):\ x-2=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):\ x-2=0}$

ខ. $(3,2,2)$ $\qquad \vec{n}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

គេបាន $(P):2(x-3)+3(y-2)-(z-2)=0$

$(P):2x+3y-z-10=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):2x+3y-z-10=0}$

គ. $(0,0,6)$ $\qquad x=1-t\,,y=2+t\,,z=4-2t$

គេបាន $\vec{n}(-1,1,-2)$

នាំឲ្យ $(P):-(x-0)+(y-0)-2(z-6)=0$

$(P):-x+y-2z+12=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):-x+y-2z+12=0}$

ឃ. $(0,2,-1)$ $\qquad \vec{n}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

គេបាន $(P):3(x-0)-2(y-2)-(z+1)=0$

$(P):3x-2y-z+3=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):3x-2y-z+3=0}$

ង. $(2,4,5)$ $\qquad x=5+t\,,y=1+3t\,,z=4t$

គេបាន $\vec{n}(1,3,4)$

នាំឲ្យ $(P):(x-2)+3(y-4)+4(z-5)=0$

$(P):x+3y+4z-34=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):x+3y+4z-34=0}$

ច. $(0,0,0)$ $\qquad \vec{n}=-3\vec{i}+2\vec{k}$

គេបាន $(P):-3(x-0)+0(y-0)+2(z-0)=0$

$(P):-3x+2z=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):-3x+2z=0}$

13.គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $\int x^3(2x-1)\,dx=\int(2x^4-x^3)dx=\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int x^3(2x-1)\,dx=\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+c}$, $(c\in\mathbb{R})$

ខ. $\int x^2(3x-5)\,dx=\int(3x^3-5x^2)dx=\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int x^2(3x-5)\,dx=\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+c}$, $(c\in\mathbb{R})$

គ. $\int(3t+2)^2\,dt=\int(9t^2+12t+4)dt=3t^3+6t^2+4t+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int(3t+2)^2\,dt=3t^3+6t^2+4t+c}$, $(c\in\mathbb{R})$

ឃ. $\int(5x+6)^2\,dx=\int(25x^2+60x+36)dx=\frac{25}{3}x^3+30x^2+36x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int(5x+6)^2\,dx=\frac{25}{3}x^3+30x^2+36x+c}$, $(c\in\mathbb{R})$

ង. $\int\sqrt{y}(y^2+2y-1)\,dy=\int(y^{\frac{5}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}})dy$

$=\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{7}\sqrt{y^7}+\frac{4}{5}\sqrt{y^5}-\frac{2}{3}\sqrt{y^3}+c$

$=\frac{2}{7}y^3\sqrt{y}+\frac{4}{5}y^2\sqrt{y}-\frac{2}{3}y\sqrt{y}+c$

$=\sqrt{y}\left(\frac{2}{7}y^3+\frac{4}{5}y^2-\frac{2}{3}y\right)+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int\sqrt{y}(y^2+2y-1)\,dy=\sqrt{y}\left(\frac{2}{7}y^3+\frac{4}{5}y^2-\frac{2}{3}y\right)+c}$

ច. $\int\sqrt{y}(4-3y-2y^2)\,dy=\int(4y^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{3}{2}}-2y^{\frac{5}{2}})dy$

$$=\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{7}y^{\frac{7}{2}}+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\int\sqrt{y}(4-3y-2y^2)\,dy=\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{7}y^{\frac{7}{2}}+c}$

ឆ. $\int\frac{3x^2+5x-4}{x^2}dx=\int\left(3+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx=3x+5\ln|x|+\frac{4}{x}+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int\frac{3x^2+5x-4}{x^2}dx=3x+5\ln|x|+\frac{4}{x}+c}$, $(c\in\mathbb{R})$

ជ. $\int\frac{x^3-6x^2+x}{x^2}dx=\int\left(x-6+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-6x+\ln|x|+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int\frac{x^3-6x^2+x}{x^2}dx=\frac{x^2}{2}-6x+\ln|x|+c}$

ឈ. $\int\frac{4+\sqrt{x}-3x}{x}dx=\int\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)dx=4\ln|x|+2\sqrt{x}-3x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int\frac{4+\sqrt{x}-3x}{x}dx=4\ln|x|+2\sqrt{x}-3x+c}$

ញ. $\int\frac{5x^2-2x+3}{\sqrt{x}}dx=\int\left(5\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$=2\sqrt{x^5}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+6\sqrt{x}+c=2x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+c$$

$$=2\sqrt{x}(x^2-\frac{2}{3}x+3)+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\int\frac{5x^2-2x+3}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}(x^2-\frac{2}{3}x+3)+c}$

ដ. $\int\frac{x^{\frac{3}{2}}+6-2xe^x}{x}dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{x}-2e^x\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+6\ln|x|-2e^x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int \frac{x^{\frac{3}{2}}+6-2xe^x}{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\ln|x|-2e^x+c}$

ឋ. $\int \frac{4x^2+4\sqrt{x}-7x}{x^2}dx=\int\left(4+\frac{4}{\sqrt{x^3}}-\frac{7}{x}\right)dx=4x-\frac{8}{\sqrt{x}}-7\ln|x|+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int \frac{4x^2+4\sqrt{x}-7x}{x^2}dx=4x-\frac{8}{\sqrt{x}}-7\ln|x|+c}$

វិញ្ញាសាទី ៥

ប្រឡងជ្រើសរើសបេក្ខជនចូលរៀនថ្នាក់ឆ្នាំសិក្សាមូលដ្ឋានសម្រាប់
វិស័យសុខាភិបាលក្នុងឆ្នាំសិក្សា ២០១០-២០១១
សម័យប្រឡង: ១៩ ធ្នូ ២០១០
រយៈពេល ១២០ នាទី

1. គេឲ្យអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\cos x$ ។

ក. គណនា $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

ខ. f មានដេរីវេមិនកំណត់។ បង្ហាញថា

$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), (n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R})$ ។

គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $x\mapsto \sin x$ ។

គ. ដោយប្រើសំណួរខាងលើ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $x\mapsto \cos 3x$ និង $x\mapsto \sin 2x$ ។

2. ថង់មួយមានបាល់ពណ៌ស៥ បាល់ពណ៌ខ្មៅ៣ និងបាល់ពណ៌ក្រហម២ ។ រកប្រូបាប ដែលទទួលបានពីការចាប់ម្តងៗពីថង់:

ក. បាល់ពណ៌ស១និងបាល់ពណ៌ខ្មៅ១ ។

ខ. បាល់មួយមិនមែនពណ៌ក្រហម ។

3. គេឲ្យ $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{1,5,6,7\}$ និង $C=\{1,2,4,6,8,9\}$ ។
គណនាសំណុំនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $A\cup B$ ខ. $A\cap B$ គ. $(A\cup B)\cap C$

ឃ. $(A\cap B)\cup C$ ង. $(A\cup C)\cap(B\cup C)$ ។

4. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $y=e^{3x}$ ត្រង់ $P(0\,,1)$ ។

5. កំណត់ថា តើបន្ទាត់ទាំងពីរដែលមានសមីការតាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម ប្រសព្វគ្នាឬទេ ? បើប្រសព្វគ្នា ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនិងកូស៊ីនុសមុំរវាងបន្ទាត់ប្រសព្វនោះ ។

ក. $(L_1): x=4t+2\,,\ y=3\,,\ z=-t+1$ និង

$(L_2): x=2s+2\,,\ y=2s+3\,,\ z=s+1$

ខ. $(L_1): \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=z+1$ និង $(L_2): \dfrac{x-1}{4}=y+2=\dfrac{z+3}{-3}$

6. គេឲ្យ g ជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

$$g'(x)-g(x)=x-\frac{e-2}{e-1} \quad (1)$$ ។

ក. កំណត់អនុគមន៍ g តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ។

ខ. គេឲ្យអនុគមន៍ $h=g-g_o$ ។ បង្ហាញថា g ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) លុះត្រាតែ h ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-y=0 \quad (2)$ ។

គ. ចូររកសំណុំចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (2) រួចទាញរកសំណុំនៃអនុគមន៍ g ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ។ កំណត់អនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ដែលមានតម្លៃសូន្យត្រង់ $x=0$ ។

7. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)^2}$ ។

ក. សរសេរ $f(x)$ ជាទម្រង់ $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}$ រួចគណនាតម្លៃ A និង B ។

ខ. គណនា $\int_3^4 f(x)\,dx$ ។

8. តម្លៃរបស់រថយន្តមួយមានការចុះថ្លៃស្របទៅតាមអយុកាលរបស់វាតាងដោយ

អនុគមន៍ $V(t)=C(1-r)^t$ ដែល C ជាតម្លៃរថយន្តថ្មី r ជាអត្រាបញ្ចុះតម្លៃ t ជាអាយុកាលគិតជាឆ្នាំ ។ បើរថយន្តថ្មីមានតម្លៃ 23 400 000៛ ហើយអត្រាបញ្ចុះតម្លៃ $r=0.16$ ។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានទៀតទើបតម្លៃរថយន្តនោះ ចុះថ្លៃមកត្រឹម 11 700 000៛ ។

9. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ក. $f(x)=x^2$ ដែល $F(3)=0$

ខ. $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ ដែល $F(1)=-1$

គ. $f(x)=\sin x$ ដែល $F(1)=7$

ឃ. $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ដែល $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

ង. $f(x)=x^2-e^x$ ដែល $F(0)=1$

ច. $f(x)=6x^2+x-10$ ដែល $F(0)=0$

ឆ. $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{x}}$ ដែល $F(1)=20$

ជ. $f(x)=6e^x-2$ ដែល $F(0)=-10$

10. គេមាន $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

គណនា $\ell im\, f(x)$ កាលណា $x\to 3$ និង $x\to 1$ ។

ចម្លើយ

1. គេឲ្យអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\cos x$

ក. គណនា $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+1\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x)=-\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x)=-\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

ខ. បង្ហាញថា $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ (n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R})$

គេមាន $f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+1\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x)=-\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x)=-\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

ឧបមាថាវាពិតដល់ n គឺ $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់ n គឺ $f^{(n+1)}(x)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

គេមាន $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]'=-\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ (n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R})}$

- គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $x\mapsto\sin x$

$f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+1\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=\cos\left(x+1\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x)=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

ដោយដេរីវេបន្តបន្ទាប់រហូតដល់តួទី n គេបាន $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$

គ. ដោយប្រើសំណួរខាងលើ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $x\mapsto\cos 3x$ និង $x\mapsto\sin 2x$

តាង $g(x)=\cos 3x$ នាំឲ្យ $g^{(n)}(x)=3^n\cos\left(3x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{g^{(n)}(x)=3^n\cos\left(3x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$

តាង $h(x)=\sin 2x$ នាំឲ្យ $h^{(n)}(x)=2^n\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{h^{(n)}(x)=2^n\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$

2. ថង់មួយមានបាល់ពណ៌ស៥ បាល់ពណ៌ខ្មៅ៣ និងបាល់ពណ៌ក្រហម២ ។ រកប្រូបាប ដែលទទួលបានពីការចាប់ម្តងៗពីថង់:

ក. បាល់ពណ៌ស១និងបាល់ពណ៌ខ្មៅ១

តាង A ជា "ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានបាល់ពណ៌ស១និងបាល់ពណ៌ខ្មៅ១"

ករណីអាច $n(S)=C(10,2)=\frac{10!}{8!2!}=\frac{10\times 9}{2}=45$

ករណីស្រប $n(A)=C(5,1)\times C(3,1)=5\times 3=15$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}=0.333$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=0.333}$

ខ. បាល់មួយមិនមែនពណ៌ក្រហម ។

តាង B ជា "ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបាល់មួយមិនមែនពណ៌ក្រហម"

ចាប់បានបាល់មួយមិនមែនពណ៌ក្រហមមានន័យថា បាល់ពណ៌ស២ បាល់ពណ៌ខ្មៅ២ ឬបាល់ពណ៌ស១ ខ្មៅ១ ។

ករណីស្រប $n(B) = C(5,2) + C(3,2) + C(5,1) \times C(3,1)$

$$n(B) = \frac{5!}{3!2!} + \frac{3!}{1!2!} + 5 \times 3 = 10 + 3 + 15 = 28$$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{28}{45} = 0.622$

ដូចនេះ $\boxed{P(B) = 0.622}$

3. គេឲ្យ $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{1,5,6,7\}$ និង $C = \{1,2,4,6,8,9\}$

គណនាសំណុំនីមួយៗខាងក្រោមៈ

ក. $A \cup B = \{1,3,5,7,9\} \cup \{1,5,6,7\} = \{1,3,5,6,7,9\}$

ដូចនេះ $\boxed{A \cup B = \{1,3,5,6,7,9\}}$

ខ. $A \cap B = \{1,3,5,7,9\} \cap \{1,5,6,7\} = \{1,5,7\}$

ដូចនេះ $\boxed{A \cap B = \{1,5,7\}}$

គ. $(A \cup B) \cap C = \{1,3,5,6,7,9\} \cap \{1,2,4,6,8,9\} = \{1,6,9\}$

ដូចនេះ $\boxed{(A \cup B) \cap C = \{1,6,9\}}$

ឃ. $(A \cap B) \cup C = \{1,5,7\} \cup \{1,2,4,6,8,9\} = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$

ដូចនេះ $\boxed{(A \cap B) \cup C = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}}$

ង. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$

ដូចនេះ $\boxed{(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}}$

4. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $y = e^{3x}$ ត្រង់ $P(0\ ,1)$

មេគុណប្រាប់ទិសគឺ $m = f\,'(0)$

គេមាន $y = f(x) = e^{3x} \Rightarrow f\,'(x) = 3e^{3x}$

នាំឲ្យ $m = 3e^{3\times 0} = 3$

ដូចនេះ មេគុណប្រាប់ទិសគឺ $\boxed{m = 3}$

5. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ និងកូស៊ីនុសមុំរវាងបន្ទាត់ប្រសព្វនោះ

ក. $(L_1): x=4t+2\ ,\ y=3\ ,\ z=-t+1$ និង

$(L_2): x=2s+2\ ,\ y=2s+3\ ,\ z=s+1$

បើ $(L_1)\cap(L_2)=\{A\}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases}4t+2=2s+2\\3=2s+3\\-t+1=s+1\end{cases}$ នោះ $t=s=0$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ $\boxed{A(2,3,1)}$

● រកកូស៊ីនុសមុំរវាងបន្ទាត់ប្រសព្វទាំងពីរនោះ

តាមរូបមន្ត $\cos\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)=\dfrac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_1}\|\cdot\|\vec{u_2}\|}$

ដោយ $(L_1): \begin{cases}x=4t+2\\y=3\\z=-t+1\end{cases}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u_1}(4,0,-1)$

$(L_2): \begin{cases}x=2s+2\\y=2s+3\\z=s+1\end{cases}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u_2}(2,2,1)$

គេបាន $\cos\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)=\dfrac{(4)(2)+(0)(2)+(-1)(1)}{\sqrt{4^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{8-1}{\sqrt{17}\sqrt{9}}$

$$=\frac{7\sqrt{17}}{3\times17}=\frac{7\sqrt{17}}{51}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)=\dfrac{7\sqrt{17}}{51}}$

ខ. $(L_1): \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=z+1$ និង $(L_2): \dfrac{x-1}{4}=y+2=\dfrac{z+3}{-3}$

គេមាន $(L_1):\begin{cases}x=3t\\ y=-t+2\\ z=t-1\end{cases}$ និង $\begin{cases}x=4s+1\\ y=s-2\\ z=-3s-3\end{cases}$ ដែល $t,s\in\mathbb{R}$

បើ $(L_1)\cap(L_2)$ នោះ $\begin{cases}3t=4s+1 & (1)\\ -t+2=s-2 & (2)\\ t-1=-3s-3 & (3)\end{cases}$

យើងយក $(2)+(3):1=-2s-5\Leftrightarrow s=-3$

យក $s=-3$ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $t-1=-3(-3)-3$

$\Rightarrow t=1+9-3=7$

យក $s=-3$, $t=7$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $3t=4s+1\Leftrightarrow 21=-12+1=-11$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់)

ដូចនេះ បន្ទាត់ទាំងពីរមិនប្រសព្វគ្នាទេ ។

6. គេឲ្យ g ជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

$$g'(x)-g(x)=x-\frac{e-2}{e-1}\qquad(1)$$

ក. កំណត់អនុគមន៍ g_o តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (1)

តាង $g_o(x)=ax+b\Rightarrow g_o'(x)=a$

យក $g_o(x)=ax+b$ និង $g_o'(x)=a$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $a-(ax+b)=x-\dfrac{e-2}{e-1}$

$$-ax+a-b=x-\frac{e-2}{e-1}\Rightarrow\begin{cases}-a=1\\ a-b=-\dfrac{e-2}{e-1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=\dfrac{e-2}{e-1}-1=\dfrac{e-2-e+1}{e-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{1}{e-1}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{g_o(x)=-x-\dfrac{1}{e-1}}$

ខ. បង្ហាញថា g ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) លុះត្រាតែ h ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'-y=0$ (2)

គេមាន $h=g-g_o \Rightarrow g=h+g_o$

បើ g ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) នោះ $g'(x)-g(x)=x-\dfrac{e-2}{e-1}$

គណនា $g'(x)-g(x)=h'(x)+g_o'(x)-h(x)-g_o(x)$

$g'(x)-g(x)=[h'(x)-h(x)]+[g'_o(x)-g_o(x)]$

ដោយ h ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'-y=0$ (2) នោះ $h'(x)-h(x)=0$

ហើយ $g_o(x)=-x-\dfrac{1}{e-1}$ នាំឲ្យ $g'_o(x)=-1$

គេបាន $g'(x)-g(x)=0+\left[-1-\left(-x-\dfrac{1}{e-1}\right)\right]=x-\dfrac{e+2}{e-1}$ (ពិត)

ដូចនេះ អនុគមន៍ g ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) លុះត្រាតែ h ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'-y=0$ ។

គ. រកសំណុំចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (2): $y'-y=0$

សមីការមានរាងអូម៉ូសែនលំដាប់ទី១នោះគេបាន $h(x)=ke^x$ ដែល k ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (2) គឺ $\boxed{h(x)=ke^x\ ,(k\in\mathbb{R})}$

- ទាញរកសំណុំនៃអនុគមន៍ g ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1)

$$g(x)=h(x)+g_o(x)=ke^x-x-\frac{1}{e-1}$$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=ke^x-x-\dfrac{1}{e-1}\ ,(k\in\mathbb{R})}$

- កំណត់អនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ដែលមានតម្លៃសូន្យត្រង់ $x=0$

$$g(x)=ke^x-x-\frac{1}{e-1}$$

ដោយ $g(0)=0 \Leftrightarrow k-\dfrac{1}{e-1}=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{e-1}$

គេបាន $g(x)=\dfrac{e^x}{e-1}-x-\dfrac{1}{e-1}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=\dfrac{e^x}{e-1}-x-\dfrac{1}{e-1}}$

7. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)^2}$

ក. សរសេរ $f(x)$ ជាទម្រង់ $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}$ រួចគណនាតម្លៃ A និង B

គេមាន $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)+2}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}}$

• គេទាញបាន $A=1$ និង $B=2$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\,,\,B=2}$

ខ. គណនា $\int_3^4 f(x)\,dx$ ។

$$\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4 \frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\,dx=\left(\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}\right)_3^4$$

$$=[\ln(2)-1]-[\ln(1)-2]=1+\ln 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\int_3^4 f(x)\,dx=1+\ln 2}$

8. តើរយៈពេលប៉ុន្មានទៀតទើបតម្លៃរថយន្តនោះ ចុះថ្លៃមកត្រឹម 11 700 000៛

គេមាន $V(t)=C(1-r)^t$

គេបាន $11\,700\,000=23\,400\,000(1-0.16)^t$

$$\Rightarrow (0.84)^t=\frac{11\,700\,000}{23\,400\,000}=0.5$$

$$\Rightarrow t=\log_{0.84}(0.5)=\frac{\ln 0.5}{\ln 0.84}=3.9755\approx 4$$

ដូចនេះ រយៈពេល៤ឆ្នាំទៀតទើបរថយន្តនោះចុះថ្លៃមកត្រឹម 11 700 000៛ ។

9. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ក. $f(x)=x^2$ ដែល $F(3)=0$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+k$$

ដោយ $F(3)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\times 3^3+k=0\Leftrightarrow k=-9$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}x^3-9}$

ខ. $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ ដែល $F(1)=-1$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{x}+k$$

ដោយ $F(1)=-1\Leftrightarrow\frac{1}{1}+k=-1\Leftrightarrow k=-2$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{1}{x}-2}$

គ. $f(x)=\sin x$ ដែល $F(1)=7$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\sin x\,dx=-\cos x+k$$

ដោយ $F(1)=7\Leftrightarrow-\cos1+k=7\Leftrightarrow k=7+\cos1$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=-\cos x+7+\cos1}$

ឃ. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ដែល $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+k$$

ដោយ $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow 1+k=-1\Leftrightarrow k=-2$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\tan x-2}$

ង. $f(x)=x^2-e^x$ ដែល $F(0)=1$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int x^2-e^x\,dx=\frac{x^3}{3}-e^x+k$$

ដោយ $F(0)=1\Leftrightarrow 0-1+k=1\Leftrightarrow k=2$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}-e^x+2}$

ច. $f(x)=6x^2+x-10$ ដែល $F(0)=0$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int 6x^2+x-10\,dx=2x^3+\frac{x^2}{2}-10x+k$$

ដោយ $F(0)=0\Leftrightarrow 0+0+0+k=0\Leftrightarrow k=0$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=2x^3+\frac{x^2}{2}-10x}$

ឆ. $f(x)=\frac{10}{\sqrt{x}}$ ដែល $F(1)=20$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int \frac{10}{\sqrt{x}}\,dx=20\sqrt{x}+k$$

ដោយ $F(1)=20\Leftrightarrow 20\sqrt{1}+k=20\Leftrightarrow k=0$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=20\sqrt{x}}$

ជ. $f(x)=6e^x-2$ ដែល $F(0)=-10$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int 6e^x-2\,dx=6e^x-2x+k$$

ដោយ $F(0)=-10\Leftrightarrow 6-0+k=-10\Leftrightarrow k=-16$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=6e^x-2x-16}$

10. គេមាន $f(x)=\frac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

គណនា $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

គេមាន $f(x)=\frac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{x^2(x-3)-(x-3)+a(x-3)}{x(x-3)+(x-3)}=\frac{(x-3)(x^2+a-1)}{(x-3)(x-1)}$$

គេបាន $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+a-1)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+a-1)}{(x-1)}=\frac{8+a}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{8+a}{2}}$

- បើ $a\neq 0$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x^2+a-1)}{(x-3)(x-1)}=\frac{-2a}{0}=\pm\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty}$

- បើ $a=0$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=2}$

វិញ្ញាសាទី ៦

ត្រៀមប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែ

ត្រៀមប្រឡងយកសញ្ញាបត្រធាក់ឌុប

ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១ - ២

ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍

ត្រៀមប្រឡងចូលរៀនពេទ្យ

I. គណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x+\cos 2x+1}{\cos 2x+\sin x}\qquad B=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 8877x}-e^{\sin 6869x}}{\tan x}$$

II. គេឲ្យ $P(Z)=(Z^2-2Z)^2+(Z^2+Z-1)^2$ ។

ក/ ចូរដាក់ $P(Z)$ ជាផលគុណកត្តា ។

ខ/ ចូរដោះស្រាយសមីការ $P(Z)=0$ ។

III. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\left[k\ell n\left(1+\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)\right]$ ។

ក/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x-\frac{x^2}{2}\le \ell n(1+x)\le x$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$ ។

ខ/ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(x_n)$ ។

IV. គេឲ្យសមីការ $(E): x^3-(2m+3)x^2+5x-3m+2=0$ ។ ឧបមាថាសមីការនេះមានឫសបីតាងដោយ $\tan\alpha,\tan\beta$ និង $\tan\gamma$ ។

ក/ ចូរគណនា $A=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ជាអនុគមន៍នៃ m ។

ខ/ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ $A=4$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

V. ១. គេឲ្យសមីការ $x^2-x-3=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃ $A=7x_1^5+19x_2^4$ ។

២. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុងនិងមុំផ្ទៀងផ្ទាត់ $c^2=4ab\cos A\cos B$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

VI. គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។

ក/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2\geq 2ab$ ។

ខ/ បើ a និង b មានសញ្ញាដូចគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ ។

គ/ បើ a និង b មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq 2$ ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x$ ។

ក/ ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេមាន $f(3x)=f^3(x)-3f(x)$ ។

ខ/ គណនា $A=(2-\sqrt{3})^9+(2+\sqrt{3})^9$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$ ។

ឃ/ ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ចម្លើយ

I. គណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x+\cos 2x+1}{\cos 2x+\sin x} \quad \text{មានរាង } \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^2 x}{1-2\sin^2 x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x(2\sin^2 x+1)}{(1-\sin^2 x)+(\sin x-\sin^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x(2\sin^2 x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)+\sin x(1-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(1-\sin^2 x)(2\sin^2 x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(1+\sin x)(2\sin^2 x+1)}{(1+2\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+1)(2+1)}{(1+2)}=4$$

ដូចនេះ $\boxed{A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x+\cos 2x+1}{\cos 2x+\sin x}=4}$

$B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 8877x}-e^{\sin 6869x}}{\tan x}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 8877x}-1-e^{\sin 6869x}+1}{\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 8877x}-1}{\tan x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 6869x}-1}{\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 8877x}-1}{\sin 8877x}\times\frac{\sin 8877x}{8877x}\times\frac{8877x}{\tan x}\right)$$

$$-\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 6869x}-1}{\sin 6869x}\times\frac{\sin 6869x}{6869x}\times\frac{6869x}{\tan x}\right)$$

$$=(1\times 1\times 8877)-(1\times 1\times 6869)=2008$$

ដូចនេះ $\boxed{B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 8877x}-e^{\sin 6869x}}{\tan x}=2008}$

II. គេឲ្យ $P(Z)=(Z^2-2Z)^2+(Z^2+Z-1)^2$ ។

ក/ ដាក់ $P(Z)$ ជាផលគុណកត្តា

$$P(Z)=(Z^2-2Z)^2+(Z^2+Z-1)^2$$

$$=(Z^2-2Z)^2-i^2(Z^2+Z-1)^2$$

$$=[(Z^2-2Z)-(Z^2+Z-1)i][(Z^2-2Z)+(Z^2+Z-1)i]$$

$$=[(1-i)Z^2-(2+i)Z+i][(1+i)Z^2-(2-i)Z-i]$$

ដូចនេះ $\boxed{P(Z)=[(1-i)Z^2-(2+i)Z+i][(1+i)Z^2-(2-i)Z-i]}$

ខ/ ដោះស្រាយសមីការ $P(Z)=0$

$$[(1-i)Z^2-(2+i)Z+i][(1+i)Z^2-(2-i)Z-i]=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(1-i)Z^2-(2+i)Z+i=0\\(1+i)Z^2-(2-i)Z-i=0\end{array}\right.$$

• ចំពោះ $(1-i)Z^2-(2+i)Z+i=0$

$$\Delta=(2+i)^2-4(1-i)i$$

$$=4+4i-1-4i-4=-1=i^2$$

$$\Rightarrow Z_1=\frac{2+i-i}{2(1-i)}=\frac{2(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{2(1+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow Z_2=\frac{2+i+i}{2(1-i)}=\frac{(2+2i)(1+i)}{2(1+1)}=\frac{2(1+i)^2}{2\cdot 2}=\frac{1+2i-1}{2}=i$$

• ចំពោះ $(1+i)Z^2-(2-i)Z-i=0$

$$\Delta=(2-i)^2-4(1+i)(-i)$$

$$=4-4i-1+4i-4=-1=i^2$$

$$\Rightarrow Z_3=\frac{2-i-i}{2(1+i)}=\frac{2(1-i)(1-i)}{2\times 2}=\frac{1-2i-1}{2}=-i$$

$$\Rightarrow Z_4=\frac{2-i+i}{2(1+i)}=\frac{2(1-i)}{2\times 2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\pm i\ ,\ Z=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i}$

III. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\left[k\ell n\left(1+\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)\right]$

ក/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x-\frac{x^2}{2}\le \ell n(1+x)\le x$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$

តាង $f(x)=\ell n(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ និង $g(x)=\ell n(1+x)-x$

• ចំពោះ $f(x)=\ell n(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1}{1+x}+x-1$$

$$=\frac{1+(x-1)(x+1)}{1+x}=\frac{1+x^2-1}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $[0\ ,+\infty[$

នាំឲ្យ $f(x)\geq 0$ ឬ $\ell n(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\geq 0$

ឬ $\ell n(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$ (1)

• ចំពោះ $g(x)=\ell n(1+x)-x$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{1-1-x}{1+x}=-\frac{x}{1+x}\leq 0$$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$

នោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $[0\ ,+\infty[$

នាំឲ្យ $g(x)\leq 0$ ឬ $\ell n(1+x)-x\leq 0$ ឬ $\ell n(1+x)\leq x$ (2)

តាម (1) & (2) គេបាន $x-\frac{x^2}{2}\leq \ell n(1+x)\leq x\ ,\ \forall x\geq 0$

ដូចនេះ $\boxed{x-\frac{x^2}{2}\leq \ell n(1+x)\leq x\ ,\ \forall x\geq 0}$

ខ/ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$

តាមសំនួរ (ក) គេបាន:

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \ell n(1+x)\leq x\ ,\ \forall x\geq 0$$

$$x\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\leq x\ell n(1+x)\leq x\cdot x$$

$$x^2-\frac{x^3}{2}\leq x\ell n(1+x)\leq x^2$$

យក $x=\frac{k}{\sqrt{n^3}}$ គេបាន

$$\left(\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)^2-\left(\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)^3\frac{1}{2}\le\frac{k}{\sqrt{n^3}}\ell n\left(1+\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)\le\left(\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)^2$$

$$\frac{k^2}{n^3}-\frac{k^3}{2n^4\sqrt{n}}\le\frac{k}{\sqrt{n^3}}\ell n\left(1+\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)\le\frac{k^2}{n^3}$$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2)-\frac{1}{2n^4\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(k^3)\le\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cdot\ell n\left(1+\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)\right]\le\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2)$$

$$\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+...+n^2)-\frac{1}{2n^4\sqrt{n}}(1^3+2^3+...+n^3)\le x_n\le\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+...+n^2)$$

ដោយ $(1^2+2^2+...+n^2)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$(1^3+2^3+...+n^3)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

គេបាន:

$$\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2n^4\sqrt{n}}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}\le x_n\le\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{n^2(n+1)^2}{8n^4\sqrt{n}}\le x_n\le\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{n^2(n+1)^2}{8n^4\sqrt{n}}\right]\le\lim_{n\to+\infty}x_n\le\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\frac{2}{6}-0\le\lim_{n\to+\infty}x_n\le\frac{2}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\lim_{n\to+\infty}x_n\le\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{3}}$

IV. គេឲ្យសមីការ $(E): x^3-(2m+3)x^2+5x-3m+2=0$ ។ ឧបមាថាសមីការនេះមានឫសបីតាងដោយ $\tan\alpha,\tan\beta$ និង $\tan\gamma$ ។

ក/ គណនា $A=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ជាអនុគមន៍នៃ m

ដោយ $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[\alpha+(\beta+\gamma)]$

$= \sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)$

$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

នាំឲ្យ $A=\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma+\tan\beta+\tan\gamma$

$=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

ដោយ $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន:

$x^3-(2m+3)x^2+5x-3m+2$

$=(x-\tan\alpha)(x-\tan\beta)(x-\tan\gamma)$

$=(x-\tan\alpha)[x^2-(\tan\beta+\tan\gamma)x+\tan\beta\tan\gamma]$

$=x^3-(\tan\beta+\tan\gamma)x^2+\tan\beta\tan\gamma x-\tan\alpha x^2$

$+(\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\gamma)x-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$=x^3-(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)x^2$

$+(\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma)x-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=2m+3\\ \tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma=5\\ \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=3m-2\end{cases}$$

គេបាន $A=(2m+3)-(3m-2)=2m+3-3m+2=-m+5$

ដូចនេះ $\boxed{A=-m+5}$

ខ/ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ $A=4$

$A=-m+5$

ដើម្បីឲ្យ $A=4$ លុះត្រាតែ

$-m+5=4$

$-m=4-5$

$\Rightarrow m=1$

ដូចនេះ $\boxed{m=1}$

គ/ ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ $m=1$

$x^3-5x^2+5x-1=0$

$(x^3-1)-(5x^2-5x)=0$

$(x-1)(x^2+x+1)-5x(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+x+1-5x)=0$

$(x-1)(x^2-4x+1)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$

$\Delta'=(-2)^2-1=3$

$\Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=1\ ,\ x_2=-2+\sqrt{3}\ ,\ x_3=-2-\sqrt{3}}$

V. ១. គេឲ្យសមីការ $x^2-x-3=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2

គណនាតម្លៃ $A=7x_1^5+19x_2^4$

ដោយ x_1 និង x_2 ជាឫសរបស់សមីការ

គេបាន $\begin{cases} x_1^2-x_1-3=0 \\ x_2^2-x_2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=x_1+3 \\ x_2^2=x_2+3 \end{cases}$

$A=7x_1^5+19x_2^4$

$=7x_1\cdot x_1^4+19x_2^4$

$=7x_1(x_1^2)^2+19(x_2^2)^2$

$=7x_1(x_1^2+6x_1+9)+19(x_2^2+6x_2+9)$

$=7x_1(x_1+3+6x_1+9)+19(x_2+3+6x_2+9)$

$=7x_1(7x_1+12)+19(7x_2+12)$

$=49x_1^2+84x_1+133x_2+228$

$=49(x_1+3)+84x_1+133x_2+228$

$=49x_1+84x_1+133x_2+147+228$

$=133x_1+133x_2+375=133(x_1+x_2)+375$

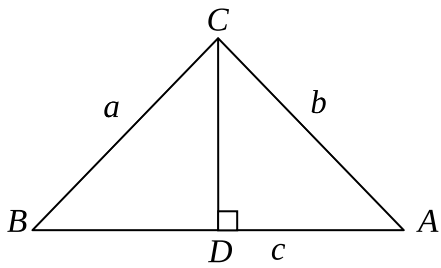
តែ $x_1+x_2=1$ (តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត)

គេបាន $A=(133\times1)+375=133+375=508$

ដូចនេះ $\boxed{A=7x_1^5+19x_2^4=508}$

២. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុងនិងមុំផ្ទៀងផ្ទាត់ $c^2=4ab\cos A\cos B$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត



ក្នុងត្រីកោណកែង BDC និង CDA

$$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{b}\Rightarrow AD=b\cos A$$

$$\cos B=\frac{DB}{BC}=\frac{DB}{a}\Rightarrow DB=a\cos B$$

ដោយ $AB=AD+DB=b\cos A+a\cos B$

ឬ $c=b\cos A+a\cos B$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ គេបាន

$$c^2=(b\cos A+a\cos B)^2$$

$$=b^2\cos^2A+a^2\cos^2B+2ab\cos A\cos B$$

តាមបំរាប់: $c^2=4ab\cos A\cos B$

គេបាន $4ab\cos A\cos B=b^2\cos^2A+a^2\cos^2B+2ab\cos A\cos B$

$$2ab\cos A\cos B=b^2\cos^2A+a^2\cos^2B$$

$$a^2\cos^2B-2ab\cos A\cos B+b^2\cos^2A=0$$

$$(a\cos B-b\cos A)^2=0$$

$$\Rightarrow a\cos B-b\cos A=0$$

$$\Rightarrow a\cos B=b\cos A$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេបាន $a=2R\sin A$ និង $b=2R\sin B$

នាំឲ្យ $2R\sin B\cos A=2R\sin A\cos B$

$$\Rightarrow \sin B\cos A=\sin A\cos B$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \tan B=\tan A$$

នាំឲ្យ $A=B$ មានន័យថាក្នុង ΔABC មានមុំ $A=B$

ដូច្នេះ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

VI. គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។

ក/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2\geq 2ab$

គេមាន $(a-b)^2\geq 0$ ឬ $a^2+b^2-2ab\geq 0$

បូកអង្គទាំងពីរនឹង $2ab$ គេបាន:

$$a^2+b^2-2ab+2ab\geq 2ab$$

$$a^2+b^2\geq 2ab$$

ដូចនេះ: $\boxed{a^2+b^2\geq 2ab}$

ខ/ បើ a និង b មានសញ្ញាដូចគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

តាមសំនួរ (ក) $a^2+b^2\geq 2ab$

ដោយ a និង b មានសញ្ញាដូចគ្នានោះ $ab>0$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $ab>0$ វិសមភាពមិនប្តូរទិសដៅ

$$\frac{a^2+b^2}{ab}\geq \frac{2ab}{ab}\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

ដូចនេះ: $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2}$

គ/ បើ a និង b មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq 2$

តាមសំនួរ (ក) $a^2+b^2\ge 2ab$

ដោយ a និង b មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នានោះ $ab<0$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $ab<0$ វិសមភាពប្តូរទិសដៅ

$$\frac{a^2+b^2}{ab}\le\frac{2ab}{ab}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le 2}$

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x$

ក/ បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេមាន $f(3x)=f^3(x)-3f(x)$

តាង $a=(2-\sqrt{3})^x$ និង $b=(2+\sqrt{3})^x$

គេបាន $ab=(2-\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x=(4-3)^x=1$

ម្យ៉ាងទៀត $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

នោះ $f(3x)=(2-\sqrt{3})^{3x}+(2+\sqrt{3})^{3x}$

$=[(2-\sqrt{3})^x]^3+[(2+\sqrt{3})^x]^3$

$=[(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x]^3-3(2-\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x[(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x]$

$=[(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x]^3-3[(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x]$

$=f^3(x)-3f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f(3x)=f^3(x)-3f(x)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}}$

ខ/ គណនា $A=(2-\sqrt{3})^9+(2+\sqrt{3})^9$

$f(9x)=f(3\cdot 3x)=f^3(3x)-3f(3x)$

យក $x=1$ នោះ $f(1)=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$

គេបាន $f(3)=f^3(1)-3f(1)=4^3-3\times 4=64-12=52$

នាំឲ្យ $f(9)=f^3(3)-3f(3)=52^3-3\times 52=140608-156=140452$

ដូចនេះ $\boxed{A=(2-\sqrt{3})^9+(2+\sqrt{3})^9=140452}$

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$

គេមាន $f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x$

គេបាន $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=14$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $(2-\sqrt{3})^x$ គេបាន

$(2-\sqrt{3})^{2x}+1=14(2-\sqrt{3})^x$

$(2-\sqrt{3})^{2x}-14(2-\sqrt{3})^x+1=0$

តាង $m=(2-\sqrt{3})^x>0$

គេបានសមីការថ្មីគឺ $m^2-14m+1=0$

$\Delta'=(-7)^2-1=49-1=48$

នាំឲ្យ $m_1=7-\sqrt{48}$, $m_2=7+\sqrt{48}$

• ចំពោះ $\begin{cases} m=7-\sqrt{48} \\ m=(2-\sqrt{3})^x \end{cases}$

នាំឲ្យ $(2-\sqrt{3})^x=7-\sqrt{48}=(4-4\sqrt{3}+3)=(2-\sqrt{3})^2$

នោះ $x=2$ ។

• ចំពោះ $\begin{cases} m=7+\sqrt{48} \\ m=(2-\sqrt{3})^x \end{cases}$

នាំឲ្យ $(2-\sqrt{3})^x=7+\sqrt{48}=4+4\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$

ឬ $(2-\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3})^2=\left[\dfrac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\right]^2$

ឬ $(2-\sqrt{3})^x=\left[\dfrac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\right]^2=\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}=(2-\sqrt{3})^{-2}$

នោះ $x=-2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{x=-2\ ,\ x=2}$

ឃ/ បង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

គេមាន $(2-\sqrt{3})^x>0$, $(2+\sqrt{3})^x>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x \geq 2\sqrt{(2-\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x}=2$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x \geq 2\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}}$

វិញ្ញាសាទី ៧

ត្រៀមប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែ
ត្រៀមប្រឡងយកសញ្ញាបត្រធាក់ឌុប
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១ - ២
ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍
ត្រៀមប្រឡងចូលរៀនពេទ្យ

I. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

II. គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^5+bx^3+1$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-3x+1 ។

III. គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0\ ,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ ។

ចូរគណនា $\displaystyle I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

IV. ១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 27^x + 3^{x+1}x^2(\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x} x\log_2 y + x^3(\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$

២. ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1) + \frac{6}{\log_3(2^x+1)} = 1 + 2\sqrt{\log_3(2^x+1) + \frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

V. គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & k \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -9 & m \end{bmatrix}$

១. គណនា A^2 និង A^{-1} ដែលជាម៉ាទ្រីសប្រាសនៃ A ។

២. រកតម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

៣. រកតម្លៃ m ដើម្បីឲ្យដេទែមីណង់ A ស្មើនឹងដេទែមីណង់ C ។

VI. រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

$$\begin{cases} f(x+1) + x\cdot g(x+1) = 2x \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = x-1 \end{cases}$$

VII. ១. គណនាផលបូក $S_n = 7 + 77 + 777 + ... + \underbrace{777...7}_{n \text{ ដង}}$

២. គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} Z_o = 2 \\ Z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} Z_n + \dfrac{2-\sqrt{3}-i}{2} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

ក/ គេតាង $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = Z_n - 1$ ។ បង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} U_n$

រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}\left(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12}\right)$ ។

ចម្លើយ

I. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

គេមាន $f(x)=\frac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{(9x^4+9x^3-24x^2+15x-3)-(6x^4+15x^3-27x^2+15x-3)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x^2-2x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\geq 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងសន្មតថា $\frac{1+a+b}{2}\geq\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\frac{2}{1+a+b}\leq\frac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

ឬ $\frac{2}{1+a+b}\leq\frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b}\leq\frac{1}{1+a}$, $\forall a,b>0$

$\frac{1}{1+a+b}\leq\frac{1}{1+b}$, $\forall a,b>0$

នោះ $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+a+b}\leq\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$

ឬ $\frac{2}{1+a+b}\leq\frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$

ឬ $\frac{2}{1+a+b}\leq\frac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

ឬ $\dfrac{1+a+b}{2} \ge \dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

ដូចនេះ តាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបានៈ

$f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$ ។

II. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-3x+1

គេមាន $P(x)=ax^5+bx^3+1$

ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-3x+1 លុះត្រាតែឫសនៃសមីការ $x^2-3x+1=0$ ជាឫសរបស់សមីការ $P(x)=0$ ដែរ ។

គេតាង α និង β ជាឫសនៃ $x^2-3x+1=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀតគេបាន $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

បើ α និង β ជាឫសរបស់ $P(x)=0$ នោះគេបាន

$$\begin{cases}P(\alpha)=0\\ P(\beta)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\alpha^5+b\alpha^3+1=0\\ a\beta^5+b\beta^3+1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a\alpha^5\beta^3+b\alpha^3\beta^3+\beta^3=0 & (1)\\ a\alpha^3\beta^5+b\alpha^3\beta^3+\alpha^3=0 & (2)\end{cases}$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន

$$a\alpha^3\beta^3(\alpha^2-\beta^2)+(\beta^3-\alpha^3)=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^3\beta^3(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)}=\frac{3^2-1}{1^3(3)}=\frac{9-1}{3}=\frac{8}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=\dfrac{8}{3}}$

III. គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0\,,1]$

បង្ហាញថា $\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

តាង $x=\pi-t$ នោះ $t=\pi-x$

គេបាន $dx=-dt$

ពេល $x=\pi$ នោះ $t=0$ និង $x=0$ នោះ $t=\pi$

គេបាន $\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\,dx=-\int_\pi^0(\pi-t)\,f[\sin(\pi-t)]\,dt$

$=-\int_\pi^0(\pi-t)\,f(\sin t)\,dt=-\int_\pi^0\pi\,f(\sin t)\,dt+\int_\pi^0 t\cdot f(\sin t)\,dt$

$=\int_0^\pi\pi\,f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi t\cdot f(\sin t)\,dt=\int_0^\pi\pi\,f(\sin x)\,dx-\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\,dx$

គេបាន $2\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\,dx=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$

នាំឲ្យ $\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$

ដូចនេះ $\boxed{\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx}$

• គណនា $I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+1-\sin^2 x}dx=\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

តាង $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$

ពេល $x=\pi$ នោះ $t=-1$ និង $x=0$ នោះ $t=1$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}(\arctan t)\big|_{-1}^{1}$

$$= \frac{\pi}{2}[\arctan(1) - \arctan(-1)] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$

IV. ១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 27^x + 3^{x+1}x^2(\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x}x\log_2 y + x^3(\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x} + 3\cdot 3^x x^2(\log_2 y)^2 = 36 \\ 3\cdot 3^{2x}x\log_2 y + x^3(\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x} + 3\cdot 3^x (x\log_2 y)^2 = 36 \\ 3\cdot 3^{2x}(x\log_2 y) + (x\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

តាង $\alpha = 3^x$ និង $\beta = x\log_2 y$

គេបាន $\begin{cases} \alpha^3 + 3\cdot\alpha\beta^2 = 36 & (1) \\ 3\alpha^2\beta + \beta^3 = 28 & (2) \end{cases}$

យក $(1)+(2)$ គេបាន:

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 64$$

$$(\alpha+\beta)^3 = 4^3 \Rightarrow \alpha + \beta = 4 \qquad (3)$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = 36 - 28$$

$$(\alpha-\beta)^3 = 8 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \qquad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេបាន

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

- ចំពោះ $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha = 3^x \end{cases} \Rightarrow x = 1$
- ចំពោះ $\begin{cases} \beta = 1 \\ \beta = x\log_2 y \end{cases} \Rightarrow x\log_2 y = 1 \Leftrightarrow \log_2 y = 1 \Leftrightarrow y = 2$

ដូចនេះ $\boxed{x=1\ ,\ y=2}$

២. ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

តាង $t=\log_3(2^x+1)$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ: $t+\dfrac{6}{t}=1+2\sqrt{t+\dfrac{8}{t^2}}$

ឬ $\dfrac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\dfrac{t^3+8}{t^2}}$

ឬ $\dfrac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\dfrac{t+2}{t}\cdot\dfrac{t^2-2t+4}{t}}$ $\quad(*)$

តាង $a=\dfrac{t+2}{t}$ និង $b=\dfrac{t^2-2t+4}{t}$

ដោយ $a+b=\dfrac{t+2}{t}+\dfrac{t^2-2t+4}{t}=\dfrac{t^2-t+6}{t}$

គេបាន $(*)$ អាចសរសេរ:

$$a+b=2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b=0$$

$$(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=0$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$$

$$\Rightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}\Rightarrow a=b$$

នោះ $\dfrac{t+2}{t}=\dfrac{t^2-2t+4}{t}\ ,\ (t\neq0)$

$$t+2=t^2-2t+4$$

$$t^2-3t+2=0$$

$$(t-1)(t-2)=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t-1=0\Rightarrow t=1\\ t-2=0\Rightarrow t=2\end{array}\right.$$

• ចំពោះ $t=1$ និង $t=\log_3(2^x+1)$

គេបាន $\log_3(2^x+1)=1 \Leftrightarrow 2^x+1=3 \Leftrightarrow x=1$

• ចំពោះ $t=2$ និង $t=\log_3(2^x+1)$

គេបាន $\log_3(2^x+1)=2 \Leftrightarrow 2^x+1=3^2 \Leftrightarrow 2^x=8=2^3 \Leftrightarrow x=3$

ដូចនេះ $\boxed{x=1\,,\ x=3}$

V. គេមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & k\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}12 & 4\\ -9 & m\end{bmatrix}$

១. គណនា A^2 និង A^{-1} ដែលជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A

$$A^2=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16+0 & 8+6\\ 0+0 & 0+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 14\\ 0 & 9\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A^2=\begin{bmatrix}16 & 14\\ 0 & 9\end{bmatrix}}$

$$A^{-1}=\frac{1}{(4\times3)-(0\cdot2)}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}}$

២. រកតម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

គេមាន $AB=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & k\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 4k+\frac{2}{3}\\ 0+0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4k+\frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

ដើម្បីឲ្យ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតាលុះត្រាតែ $4k+\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{k=-\frac{1}{6}}$

៣. រកតម្លៃ m ដើម្បីឲ្យដេទែមីណង់ A ស្មើនឹងដេទែមីណង់ C

គេមាន $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=(4\times 3)-(0\times 2)=12$

$$C=\begin{bmatrix}12 & 4\\ -9 & m\end{bmatrix} \Rightarrow \det(C)=12m+36$$

ដោយ $\det(A)=\det(C)$ នោះ $12=12m+36 \Leftrightarrow 12m=-24 \Leftrightarrow m=-2$

ដូចនេះ $\boxed{m=-2}$

VI. រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

$$\begin{cases} f(x+1)+x\cdot g(x+1)=2x \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x-1 \end{cases}$$

ជំនួស $x+1$ ដោយ x និង $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ដោយ x គេបាន:

$$\begin{cases} f(x)+x\cdot g(x)=2(x-1) & (1) \\ f(x)+g(x)=\dfrac{2}{x-1} & (2) \end{cases}$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន

$$(x-2)g(x)=2(x-1)-\frac{2}{x-1}$$

$$(x-2)g(x)=\frac{2(x-1)^2-2}{x-1}$$

$$(x-2)g(x)=\frac{2x^2-4x}{x-1} \Leftrightarrow (x-2)g(x)=\frac{2x(x-2)}{x-1}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{2x}{x-1}$$

តាម (2) : $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=-2\ ,\ g(x)=\frac{2x}{x-1}}$

VII. ១. គណនាផលបូក $S_n=7+77+777+...+\underbrace{777...7}_{n\text{ ដង}}$

$$\frac{9}{7}S_n=9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{n\text{ ដង}}$$

$$=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+...+\underbrace{100...0-1}_{n\text{ ដង}}$$

$$=10+100+1000+...+\underbrace{100...0}_{n\text{ ដង}}-n$$

$$=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n=\frac{10(10^n-1)-9n}{9}$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{10(10^n-1)-9n}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{70(10^n-1)-63n}{81}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{70(10^n-1)-63n}{81}}$

២. គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} Z_o=2 \\ Z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n+\frac{2-\sqrt{3}-i}{2}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ក/ បង្ហាញថា $U_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_n$ រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេតាង $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=Z_n-1$

$Z_n=U_n+1$ នោះ $Z_{n+1}=U_{n+1}+1$

គេបាន $U_{n+1}+1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(U_n+1)+\frac{2-\sqrt{3}-i}{2}$

$$U_{n+1}+1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_n+\frac{\sqrt{3}+i}{2}+1+\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

$$U_{n+1}+1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_n+1$$

$$\Rightarrow U_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_n \quad , \forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_n \quad , \forall n\in\mathbb{N}}$

- ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$$n=0\Rightarrow U_1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_o=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(Z_o-1)$$

$$=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(2-1)=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$n=1\Rightarrow U_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_1=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$$

$$n=2\Rightarrow U_3=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3$$

....

$$n=n-1\Rightarrow U_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n \quad , \forall n\in\mathbb{N}}$

ខ/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n=2\cos\frac{n\pi}{12}\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$ ។

គេមាន $U_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$ តែ $U_n=Z_n-1$

នោះគេបាន $Z_n - 1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$

$$Z_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + 1$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n + 1 = \cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}+1$$

$$= \left(1+\cos\frac{n\pi}{6}\right)+i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{12}+2i\sin\frac{n\pi}{12}\cos\frac{n\pi}{12} = 2\cos\frac{n\pi}{12}\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right)}$

វិញ្ញាសាទី ៨

ត្រៀមប្រឡងយកសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១ - ២

ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍

ត្រៀមប្រឡងចូលរៀនពេទ្យ

I.(1). គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

ក/ កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឲ្យ $Z = x + iy$ ។

ខ/ គណនាម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ Z ។

គ/ សរសេរ Z^3 និង Z^{1987} ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

(2) ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ នូវសមីការ

$$\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)+1=0$$

II. ក/ គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ដោយ

$f(x)=\tan^2 x-\sin^2 x$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\tan^2 x\cdot\sin^2 x$ គ្រប់ $x\in I$ ។

ខ/ u ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $u(x)=\tan x$ ។ គណនា $u'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $\tan x$ ។

គ/ F ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $F(x)=\dfrac{4\tan x+\sin 2x-6x}{4}$ ។

បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើចន្លោះ I រួចគណនា $\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\cdot\sin^2 x\,dx$ ។

III. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២ : $y''+\dfrac{9}{4}y=0 \quad (E)$ ។

ក/ ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

ខ/ កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4$ និង $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=6$ ។

គ/ កំណត់តម្លៃ r និង φ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=r\cos\left(\dfrac{3x}{2}+\varphi\right)$ ដែល $0\le\varphi\le 2\pi$ ។

IV. គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)^3}\right]$

V. ដោះស្រាយសមីការ

ក/ $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$

ខ/ $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^x(e^x-2)$ ។

ក/ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

ខ/ សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f ។

គ/ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹង (C) តាង $f(x)$ ត្រង់ចំណុច $x_o=\ell n2$ ។

ឃ/ សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ង/ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ នូវវិសមីការ $e^{2x}-2e^x-3\le 0$ ។

VII. គេឲ្យបួនចំណុច $A(1,0,2)$, $B(1,1,0)$, $C(0,0,1)$ និង $D(1,1,1)$ ។

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

ក/ គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ ទាញថា A,B,C ជាកំពូលនៃត្រីកោណមួយដែលត្រូវកំណត់ក្រឡាផ្ទៃ ។

ខ/ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។ រក h ជារង្វាស់កំពូលគូសចេញពី D នៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។ ទាញរកមាឌ V នៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។

គ/ ស្វ៊ែ $(S): x^2+y^2+z^2-3x+y-z=0$ ។ សរសេរ (S) ជាទម្រង់ស្តង់ដារួចទាញរកកូអរដោនេចំណុចផ្ចិត I ។ បង្ហាញថា $A\in(S)$ ។

ឃ/ ប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ A ។ សរសេរសមីការប្លង់ (P) ។

ចម្លើយ

I.(1). គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

ក/ កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឲ្យ $Z=x+iy$ ។

គេមាន $Z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\dfrac{3+2\sqrt{3}i-1}{3+1}=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4}$

ឬ $Z=\dfrac{2}{4}+\dfrac{2\sqrt{3}}{4}i=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

តែ $Z=x+yi$ គេបាន $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\dfrac{1}{2}\ ,\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

ខ/ គណនាម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ Z ។

គេមាន $Z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

គេបាន ម៉ូឌុលគឺ $|Z|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{\dfrac{4}{4}}=1$

អាគុយម៉ង់គឺ $\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{1/2}{1} \\ \sin\dfrac{\sqrt{3}/2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{|Z|=1\ ,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}}$

គ/ សរសេរ Z^3 និង Z^{1987} ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $Z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

គេបាន $Z^3=(e^{\frac{\pi}{3}i})^3=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$$Z^{1987}=Z^{1986}Z=(Z^3)^{662}Z=(-1)^{662}Z=Z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=-1\ ,\ Z^{1987}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

(2) ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ នូវសមីការ

$$\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)+1=0$$

តាង $Z=\dfrac{3z+i}{z-i}$ ដែល $z\neq i$

សមីការអាចសរសេរ: $Z^3+Z^2+Z+1=0$

$Z^2(Z+1)+(Z+1)=0$

$(Z+1)(Z^2+1)=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}Z+1=0\Rightarrow Z=-1\\ Z^2+1=0\Rightarrow Z=\pm i\end{array}\right.$$

- ចំពោះ $Z=-1$ និង $Z=\dfrac{3z+i}{z-i}$

  គេបាន $\dfrac{3z+i}{z-i}=-1\Leftrightarrow 3z+i=-z+i\Leftrightarrow 4z=0\Leftrightarrow z=0$

- ចំពោះ $Z=-i$ និង $Z=\dfrac{3z+i}{z-i}$

  គេបាន $\dfrac{3z+i}{z-i}=-i\Leftrightarrow 3z+i=-iz-1\Leftrightarrow(3+i)z=-1-i$

  $$\Leftrightarrow z=\frac{-1-i}{3+i}=\frac{(-1-i)(3-i)}{9+1}=\frac{-3+i-3i-1}{10}=\frac{-4-2i}{10}$$

  $$\Leftrightarrow z=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

- ចំពោះ $Z=i$ និង $Z=\dfrac{3z+i}{z-i}$

  គេបាន $\dfrac{3z+i}{z-i}=i\Leftrightarrow 3z+i=iz+1\Leftrightarrow(3-i)z=1-i$

  $$z=\frac{1-i}{3-i}=\frac{(1-i)(3+i)}{9+1}=\frac{3+i-3i+1}{10}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

ដូចនេះ $\boxed{z=0\ ,\ z=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\ ,\ z=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i}$

II. ក/ គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I=\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ ដោយ

$f(x)=\tan^2 x-\sin^2 x$ ។

បង្ហាញថា $f(x)=\tan^2 x\cdot\sin^2 x$ គ្រប់ $x\in I$

គេមាន $f(x)=\tan^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)$

$$=\sin^2 x\left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)=\sin^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

$$=\sin^2 x\cdot\tan^2 x=\tan^2 x\cdot\sin^2 x\ \ ,\ \forall x\in I$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\tan^2 x\cdot\sin^2 x\ ,\ \forall x\in I}$

ខ/ គណនា $u'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $\tan x$

គេមាន $u(x)=\tan x$

គេបាន $u'(x)=1+\tan^2 x\ \ ,\ \forall x\in I$

ដូចនេះ $\boxed{u'(x)=1+\tan^2 x\ \ ,\ \forall x\in I}$

គ/ F ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $F(x)=\frac{4\tan x+\sin 2x-6x}{4}$ ។

បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើចន្លោះ I

គេមាន $f(x)=\tan^2 x-\sin^2 x$

$$F'(x)=\frac{4(1+\tan^2 x)+2\cos 2x-6)}{4}=1+\tan^2 x+\left(\frac{\cos 2x-1}{2}\right)-1$$

$$=1+\tan^2 x-\sin^2 x-1=\tan^2 x-\sin^2 x=f(x)$$

ដូចនេះ F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើចន្លោះ I ។

• គណនា $\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\cdot\sin^2 x\,dx$

$$\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\cdot\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi/4}f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\pi/4}$$

$$=\left[\frac{4\tan x+\sin 2x-6x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{4+1-\frac{3\pi}{2}}{4}\right)-0=\frac{5}{4}-\frac{3\pi}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\cdot\sin^2 x\,dx=\frac{5}{4}-\frac{3\pi}{8}}$

III. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២ : $y''+\frac{9}{4}y=0 \quad (E)$

ក/ ដោះស្រាយសមីការ (E)

សមីការសម្គាល់ $r^2+\frac{9}{4}=0 \Rightarrow r=\pm i\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}i$

នាំឲ្យ $y=A\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$ ដែល $A\,,\,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{y=A\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\,,\,(A,B\in\mathbb{R})}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)

ខ/ កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E)

$$f(x)=A\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

$$f'(x)=-\frac{3A}{2}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{3B}{2}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$$

ដោយ $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4 \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=4 \\ -\frac{3A}{2}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+4\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}\,,\ \forall x\in\mathbb{R}$

គ/ កំណត់តម្លៃ r និង φ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=r\cos\left(\frac{3x}{2}+\varphi\right)$ ដែល $0\le\varphi\le 2\pi$

គេមាន $f(x)=-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+4\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$

$$=-4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$=-4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\cos\left(\pi+\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{5\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{r=4\sqrt{2}\ ,\ \varphi=\frac{5\pi}{4}}$

IV. គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}}=\left(\frac{1}{1+0}\right)^{\frac{1+0}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}}=1}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1}$

គ/ $\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+x+1+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2x+3)=6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=6}$

ឃ/ $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)^3}\right]$ មានរាង $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)^3}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)^2-3}{(1-x)^3}\right]=\pm\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)^3}\right]=\pm\infty}$

V. ដោះស្រាយសមីការ

ក/ $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$

$$81^{\sin^2 x}+81^{1-\sin^2 x}=30$$

$$81^{\sin^2 x}+\frac{81}{81^{\sin^2 x}}=30$$

$$81^{2\sin^2 x}+81=30\cdot 81^{\sin^2 x}$$

$$81^{2\sin^2 x}-30\cdot 81^{\sin^2 x}+81=0$$

តាង $t=81^{\sin^2 x}>0$

គេបាន $t^2-30t+81=0$

$$t^2-30t+81=0$$

$$\Delta'=(-15)^2-81=144$$

$$\Rightarrow t=15-12=3\ ,\ t=15+12=27$$

• ចំពោះ $\begin{cases} t=81^{\sin^2 x} \\ t=3 \end{cases} \Rightarrow 81^{\sin^2 x}=3 \Leftrightarrow 3^{4\sin^2 x}=3$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi=\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ,\ \ x=\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}}$

$$\sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ,\ \ x=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}}$

• ចំពោះ $\begin{cases} t = 81^{\sin^2 x} \\ t = 27 \end{cases} \Rightarrow 81^{\sin^2 x} = 27 \Leftrightarrow 3^{4\sin^2 x} = 3^3$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x = 3 \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}}$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}}$

ខ/ $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$

គេបាន $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{2x} + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{2x} + 1 = 4(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{2x} - 4(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + 1 = 0$$

តាង $t = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x > 0$

គេបាន $t^2-4t+1=0$

$$\Delta'=(-2)^2-1=4-1=3$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=2-\sqrt{3} \\ t=2+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

• ចំពោះ $\begin{cases} t=2-\sqrt{3} \\ t=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=(2-\sqrt{3})$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})}$$

$$=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-2}$$

$$\Rightarrow x=-2$$

• ចំពោះ $\begin{cases} t=2+\sqrt{3} \\ t=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=(2+\sqrt{3})$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \Leftrightarrow x=2$$

ដូចនេះ $\boxed{x=-2\ ,\ x=2}$

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^x(e^x-2)$

ក/ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x(e^x-2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x(e^x-2)=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\ \ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0}$

ខ/ សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f

$$f'(x)=e^x(e^x-2)+e^xe^x=e^x(e^x-2+e^x)=2e^x(e^x-1)$$

ដោយ $e^x > 0\,,\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f\,'(x)$ មានសញ្ញាដូច $e^x - 1$ ។

បើ $f\,'(x)=0$, $e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$

បើ $f\,'(x)>0$, $e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

បើ $f\,'(x)<0$, $e^x-1<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f\,'(x)$	$-$	0	$+$

- **ចំណុចបរមា:** f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=-1$ ។
- អាសុីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

នាំឲ្យ $y=0$ ជាបន្ទាត់អាសុីមតូតដេកនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

ដូចនេះ $y=0$ ជាបន្ទាត់អាសុីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f\,'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

គ/ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹង (C)

តាមរូបមន្ត $(T): y = f\,'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$ ដែល $x_o=\ell n2$

គេមាន $f(x)=e^x(e^x-2)$ និង $f\,'(x)=2e^x(e^x-1)$

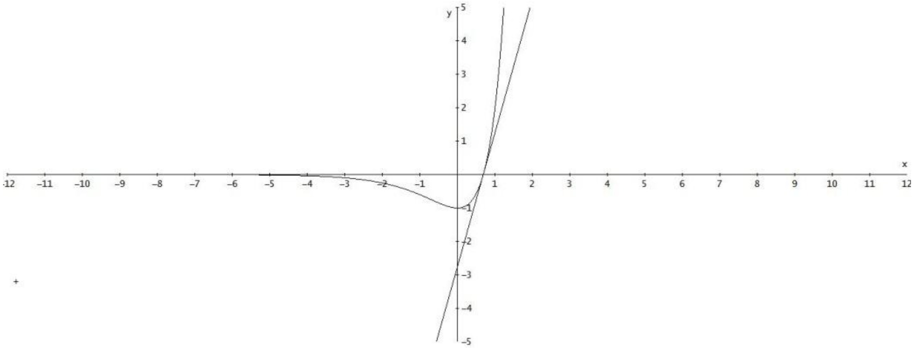
នាំឲ្យ $f\,'(\ell n2)=2e^{\ell n2}(e^{\ell n2}-1)=4(2-1)=4$

$f(\ell n2)=e^{\ell n2}(e^{\ell n2}-2)=2(2-2)=0$

គេបាន $(T): y=4(x-\ell n2)+0=4x-4\ell n2$

ដូចនេះ $\boxed{(T): y=4x-4\ell n2}$

ឃ/ សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$



ង/ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ នូវវិសមីការ $e^{2x}-2e^{x}-3\le 0$

បើ $e^{2x}-2e^{x}-3=0 \Leftrightarrow x=\ell n3$

$e^{2x}-2e^{x}\le 3 \Leftrightarrow e^{x}(e^{x}-2)\le 3 \Leftrightarrow f(x)\le 3$

តាមក្រាបខាងលើ បើ $f(x)\le 3$ នោះ $x\in]-\infty\ ,\ \ell n3]$

ដូចនេះ $\boxed{x\le \ell n3}$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ ។

VII. គេឲ្យបួនចំណុច $A(1,0,2)$, $B(1,1,0)$, $C(0,0,1)$ និង $D(1,1,1)$

ក/ គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB}(0,1,-2)$, $\overrightarrow{AC}(-1,0,-1)$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}$

• ទាញថា A,B,C ជាកំពូលនៃត្រីកោណមួយដែលត្រូវកំណត់ក្រឡាផ្ទៃ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq 0$ នោះ A,B,C មិនឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយទេ

ដូច្នេះ ចំណុច A,B,C បង្កើតបានជាកំពូលនៃត្រីកោណមួយ ។

ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$

ដោយ $\| \vec{AB}\times\vec{AC} \| = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

នាំឲ្យ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}\text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

ខ/ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) ដែលកាត់តាមចំណុច $C(0,0,1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ កំណត់ដោយរូបមន្ត

$(ABC): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

$(ABC): -(x-0)+2(y-0)+(z-1)=0$

$(ABC): -x+2y+z-1=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC): -x+2y+z-1=0}$

• រក h ជារង្វាស់កំពូលគូសចេញពី $D(1,1,1)$ នៃតេត្រាអែត $ABCD$

$$h=d(D,(ABC))=\frac{|-x_o+2y_o+z_o-1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|-1+2+1-1|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{h=\frac{\sqrt{6}}{6}\text{ (ឯកតាប្រវែង)}}$

• ទាញរកមាឌ V នៃតេត្រាអែត $ABCD$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}h\times S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{6}\text{ (ឯកតាមាឌ)}$$

ដូចនេះ $\boxed{V_{ABCD}=\frac{1}{6}\text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

គ/ ស្វ៊ែ $(S): x^2+y^2+z^2-3x+y-z=0$

• សរសេរ (S) ជាទម្រង់ស្តង់ដារួចទាញរកកូអរដោនេចំណុចផ្ចិត I

$$(S): x^2+y^2+z^2-3x+y-z=0$$

$$(S):(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(z-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=0$$

$$(S):(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{11}{4}$$

$$(S):(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{11}}{2})^2$$

គេទាញបានកូអរដោនេផ្ចិត $I(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដាគឺ $\boxed{(S):(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}$

- បង្ហាញថា $A\in(S)$

យក $A(1,0,2)$ ជំនួសក្នុងស្វ៊ែ (S)

គេបាន $(1-\frac{3}{2})^2+(0+\frac{1}{2})^2+(2-\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{11}}{2})^2$

$$(1-\frac{3}{2})^2+(0+\frac{1}{2})^2+(2-\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{11}}{2})^2$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=(\frac{\sqrt{11}}{2})^2$$

$$(\frac{\sqrt{11}}{2})^2=(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 \quad \text{(ផ្ទៀងផ្ទាត់)}$$

ដូចនេះ $\boxed{A\in(S)}$

ឃ/ សរសេរសមីការប្លង់ (P)

ដោយប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ A នោះ $(P)\perp\overrightarrow{AI}$

គេមាន $A(1,0,2)$ និង $\overrightarrow{AI}(\frac{3}{2}-1,-\frac{1}{2}-0,\frac{1}{2}-2)=\overrightarrow{AI}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

គេបាន $(P):\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-0)-\frac{3}{2}(z-2)=0$

$$(P): \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = 0$$

$$(P): \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{(P): \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = 0}$

វិញ្ញាសាទី ៩

ត្រៀមប្រឡងយកសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១ - ២

ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍

ត្រៀមប្រឡងចូលរៀនពេទ្យ

I. គណនាអាំងតេក្រាល

$$A = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad B = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx \quad C = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx$$

II. 1. រកដេរីវេទី១និងទី២នៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3 + e^{-2x} + \ell n(\sqrt{4x+1} - 1) - 10$

និង $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$ ។

2. រកដេរីវេទី១និងទី២នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក/ $x^2 + y^2 = 4$ ខ/ $xy + y^2 - x^2 = 5$

3. រកដេរីវេទី 2009 នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ។

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x & \text{បើ } x < -1 \\ \sqrt{1+x} & \text{បើ } x \geq -1 \end{cases}$

ក/ គណនា $\lim\limits_{n\to -1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{n\to -1^-} f(x)$ ។

ខ/ តើ $f(x)$ មានលីមីតត្រង់ $x=-1$ឬទេ? ព្រោះអ្វី?

IV. ប្រអប់មួយមានបាល់ក្រហម២និងបាល់ខៀវ៦ ។ គេយកបាល់ពីរចេញដោយចៃដន្យ

ក/ រកប្រូបាបដែលបាល់ទាំងពីរគ្មានពណ៌ក្រហម ។

ខ/ រកប្រូបាបដែលយ៉ាងតិចណាស់មានបាល់មួយពណ៌ក្រហម ។

គ/ រកប្រូបាបដែលបាល់មួយគត់ជាពណ៌ក្រហម ។

V. ក/ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $(\ell nx)^4-10(\ell nx)^2+9=0$ ។

ខ/ កំណត់ចម្លើយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $\ell n(10-x^2)=2\ell n3-\ell nx^2$

VI. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(x^2-4)e^{2x}$ ។

ក/ រកតម្លៃ a , b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ F កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ ជាព្រីមីទីវនៃ f ។

ខ/ រកព្រីមីទីវ F នៃអនុគមន៍ f ដែល $F(0)=0$ ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $y=f(x)=x^2\ell nx-\dfrac{x^2}{2}$ មានក្រាប C ។

ក/ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ/ គណនាដេរីវេនិងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ បញ្ជាក់តម្លៃអប្បបរមានៃ f ។

គ/ គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

រកសមីការបន្ទាត់ d ប៉ះនឹងក្រាប C នៅត្រង់ចំណុច $A(2\ ,\ 4\ell n2-2)$ ។

ឃ/ សង់ក្រាប C បន្ទាត់ប៉ះ d ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

VIII. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យប្លង់

$(P): x+2y-z+5=0$ និងបន្ទាត់ $(d): \dfrac{x+3}{2}=y+1=z-3$ ។

ក/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា (d) មិនស្របនឹង (P) ។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាង (d) និង (P) ។

ខ/ កំណត់មុំ α ជាមុំផ្គុំដោយបន្ទាត់ (d) និង (P) ។

គ/ សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (d) ហើយកែងនឹង (P) ។

ចម្លើយ

I. គណនាអាំងតេក្រាល

$$A=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

តាង $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6$

$$dx=6t^5dt$$

គេបាន $A=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=\int\frac{t^3}{t+1}dt$

$$=6\left[\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{t+1}\right]=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ell n|t+1|\right)+k$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ell n(\sqrt[6]{x}+1)+k\ ,\ (k\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ $\boxed{A=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ell n(\sqrt[6]{x}+1)+k\ ,\ (k\in\mathbb{R})}$

$$B=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int\frac{\frac{1+\cos 2x}{2}}{\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos 2x}+1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos 2x}dx+\frac{1}{2}x$$

តាមរូបមន្ត $\int\frac{1}{\cos x}dx=\ell n\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|+C$

គេបាន $B=\frac{1}{4}\ell n\left|\frac{1}{\cos 2x}+\tan 2x\right|+\frac{1}{2}x+k\ ,\ (k\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ $\boxed{B=\frac{1}{4}\ell n\left|\frac{1}{\cos 2x}+\tan 2x\right|+\frac{1}{2}x+k\ ,\ (k\in\mathbb{R})}$

$$C=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos 2x}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)dx-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}\ell n\left|\frac{1}{\cos 2x}+\tan 2x\right|-\frac{1}{2}x+k\ ,\ (k\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ $\boxed{C=\frac{1}{4}\ell n\left|\frac{1}{\cos 2x}+\tan 2x\right|-\frac{1}{2}x+k\ ,\ (k\in\mathbb{R})}$

II. 1.រកដេរីវេទី១និងទី២នៃអនុគមន៍

• ចំពោះ $f(x)=x^3+e^{-2x}+\ell n(\sqrt{4x+1}-1)-10$

តាង $h(x)=\ell n(\sqrt{4x+1}-1)$

$$h'(x)=\frac{(\sqrt{4x+1}-1)'}{(\sqrt{4x+1}-1)}=\frac{\frac{2}{\sqrt{4x+1}}}{(\sqrt{4x+1}-1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4x+1}(\sqrt{4x+1}-1)}=\frac{2}{(4x+1)-\sqrt{4x+1}}$$

$$h''(x)=-\frac{2[(4x+1)-\sqrt{4x+1}]'}{[(4x+1)-\sqrt{4x+1}]^2}=-\frac{2\left(4-\frac{2}{\sqrt{4x+1}}\right)}{[(4x+1)-\sqrt{4x+1}]^2}$$

$$=-\frac{8\sqrt{4x+1}-4}{\sqrt{4x+1}[(4x+1)-\sqrt{4x+1}]^2}$$

គេបាន $f'(x)=3x^2-2e^{-2x}+h'(x)$

$$=3x^2-2e^{-2x}+\frac{2}{(4x+1)-\sqrt{4x+1}}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=3x^2-2e^{-2x}+\frac{2}{(4x+1)-\sqrt{4x+1}}}$

$f''(x)=6x+4e^{-2x}+h''(x)$

$$=6x+4e^{-2x}-\frac{8\sqrt{4x+1}-4}{\sqrt{4x+1}[(4x+1)-\sqrt{4x+1}]^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=6x+4e^{-2x}-\frac{8\sqrt{4x+1}-4}{\sqrt{4x+1}[(4x+1)-\sqrt{4x+1}]^2}}$

• ចំពោះ $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}=\dfrac{x^2-9+9}{x^2-9}=1+\dfrac{9}{x^2-9}$

$$g'(x)=-\frac{9(2x)}{x^2-9}=-\frac{18x}{(x^2-9)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x)=-\dfrac{18x}{(x^2-9)^2}}$

$$g''(x)=\frac{-18(x^2-9)^2-2(2x)(x^2-9)(-18x)}{(x^2-9)^4}$$

$$=\frac{-18(x^2-9)-2(2x)(-18x)}{(x^2-9)^3}$$

$$=\frac{-18x^2+162+72x^2}{(x^2-9)^3}=\frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{g''(x)=\dfrac{54x^2+162}{(x^2-9)^3}}$

2.រកដេរីវេទី១និងទី២នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក/ $x^2+y^2=4$

$$2x+2y'y=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=-\dfrac{x}{y}}$

$$2x+2y'y=0$$

$$2+2(y''y+y'y')=0$$

$$y''y'+y'y'=-1$$

$$\Rightarrow y''=\frac{-1-y'y'}{y'}=\frac{-1-\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)}{\left(-\frac{x}{y}\right)}=\frac{-1-\frac{x^2}{y^2}}{-\frac{x}{y}}$$

$$=\frac{(-y^2-x^2)}{y^2}\left(-\frac{y}{x}\right)=\frac{y^2+x^2}{xy}$$

ដូចនេះ $\boxed{y''=\frac{y^2+x^2}{xy}}$

ខ/ $xy+y^2-x^2=5$

$xy+y^2-x^2=5$

$y+xy'+2y'y-2x=0$

$y'(x+2y)=2x-y$

$\Rightarrow y'=\frac{2x-y}{x+2y}$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{2x-y}{x+2y}}$

$y'=\frac{2x-y}{x+2y}$

$$\Rightarrow y''=\frac{(2-y')(x+2y)-(1+2y')(2x-y)}{(x+2y)^2}$$

$$=\frac{(2x+4y-xy'-2y'y)-(2x-y+4xy'-2y'y)}{(x+2y)^2}$$

$$=\frac{5y-5xy'}{(x+2y)^2}=\frac{5y-5x\left(\frac{2x-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}=\frac{5y(x+2y)-5x(2x-y)}{(x+2y)(x+2y)^2}$$

$$=\frac{5xy+10y^2-10x^2+5xy}{(x+2y)(x+2y)^2}=\frac{10xy-10x^2+10y^2}{(x+2y)(x+2y)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{y''=\frac{10xy-10x^2+10y^2}{(x+2y)(x+2y)^2}}$

3.រកដេរីវេទី 2009 នៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}=(-1)^1\frac{2}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{2\times 3x^2}{x^6}=\frac{2\cdot 3}{x^4}=(-1)^2\frac{2\cdot 3}{x^4}$$

$$f'''(x)=(-1)^3\frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$$

....

$$f^{(2009)}(x)=(-1)^{2009}\frac{2\times 3\times 4\times ...\times 2010}{x^{2+2009}}=-\frac{2\times 3\times 4\times ...\times 2010}{x^{2011}}$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(2009)}(x)=-\frac{2\times 3\times 4\times ...\times 2010}{x^{2011}}}$

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}1+\cos\pi x & \text{បើ } x<-1\\ \sqrt{1+x} & \text{បើ } x\geq -1\end{cases}$

ក/ គណនា $\lim\limits_{n\to -1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{n\to -1^-} f(x)$ ។

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\sqrt{1+x}=0$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1+\cos\pi x)=1+\cos(-\pi)=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0}$

ខ/ $f(x)$ មានលីមីតត្រង់ $x=-1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=0$

IV. ប្រអប់មួយមានបាល់ក្រហម២និងបាល់ខៀវ៦ ។ គេយកបាល់ពីរចេញដោយចៃដន្យ

ក/ រកប្រូបាបដែលបាល់ទាំងពីរគ្មានពណ៌ក្រហម

តាង " A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបាល់ទាំងពីរគ្មានពណ៌ក្រហម"

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(8,2)=\frac{8!}{6!2!}=\frac{8\times 7}{2}=28$ ករណី

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(6,2)=\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times 5}{2}=15$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{28}=0.535$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=0.535}$

ខ/ រកប្រូបាបដែលយ៉ាងតិចណាស់មានបាល់មួយពណ៌ក្រហម ។

តាង " B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលយ៉ាងតិចណាស់មានបាល់មួយពណ៌ក្រហម"

ព្រឹត្តិការណ៍ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A

គេបាន $P(B)=1-P(A)=1-0.535=0.465$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=0.465}$

គ/ រកប្រូបាបដែលបាល់មួយគត់ជាពណ៌ក្រហម

តាង " C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបាល់មួយគត់ជាពណ៌ក្រហម"

បាល់មួយគត់ជាពណ៌ក្រហម មានន័យថាគេចាប់បានបាល់ពណ៌ក្រហម១ ខៀវ១

ករណីស្រប $n(C)=C(6,1)\times C(2,1)=6\times 2=12$

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{12}{28}=0.428$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=0.428}$

V. ក/ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $(\ell nx)^4-10(\ell nx)^2+9=0$ ។

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $x>0$

តាង $t=(\ell nx)^2$, $t>0$

គេបាន $t^2-10t+9=0$

មានរាង $a+b+c=0$ គឺ $1-10+9=0$

នាំឲ្យ $t=1$, $t=9$

• ចំពោះ $\begin{cases} t = (\ell nx)^2 \\ t = 1 \end{cases}$ នោះ $(\ell nx)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ell nx = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e} \\ \ell nx = 1 \Rightarrow x = e \end{array}\right.$

• ចំពោះ $\begin{cases} t = (\ell nx)^2 \\ t = 9 \end{cases}$ នោះ $(\ell nx)^2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ell nx = -3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e^3} \\ \ell nx = 3 \Rightarrow x = e^3 \end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{x = \left\{ \dfrac{1}{e^3}, \dfrac{1}{e}, e, e^3 \right\}}$

ខ/ កំណត់ចម្លើយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $\ell n(10 - x^2) = 2\ell n3 - \ell nx^2$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} 10 - x^2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} < x < \sqrt{10} \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\ell n(10 - x^2) = 2\ell n3 - \ell nx^2$

$\ell n(10 - x^2) = \ell n\left(\dfrac{9}{x^2}\right)$

$10 - x^2 = \dfrac{9}{x^2}$

$10x^2 - x^4 = 9 \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 3 \end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{x = \{-3, -1, 1, 3\}}$

VI. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

ក/ រកតម្លៃ a , b និង c

$F'(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x}$

$\quad = [2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c)]e^{2x}$

ដើម្បីឲ្យ F ជាព្រីមីទីវរបស់ f លុះត្រាតែ $F'(x) = f(x)$

គេបាន $[2ax^2+(2a+2b)x+(b+2c)]e^{2x}=(x^2-4)e^{2x}$

នាំឲ្យ $\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=-1/2\\c=-7/4\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}\ ,\ c=-\frac{7}{4}}$

ខ/ រកព្រីមីទីវ F នៃអនុគមន៍ f ដែល $F(0)=0$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)e^{2x}+C$$

ដោយ $F(0)=0\Leftrightarrow-\frac{7}{4}+C=0\Leftrightarrow C=\frac{7}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)e^{2x}+\frac{7}{4}}$

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $y=f(x)=x^2\ell nx-\frac{x^2}{2}$ មានក្រាប C ។

ក/ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x>0$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $D=]0\ ,+\infty[$ ។

ខ/ គណនាដេរីវេនិងសិក្សាសញ្ញា $f\,'(x)$

$f\,'(x)=2x\ell nx+x-x=2x\ell nx$

ដូចនេះ $\boxed{f\,'(x)=2x\ell nx}$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f\,'(x)$

បើ $f\,'(x)=0\Leftrightarrow 2x\ell nx=0\Leftrightarrow \ell nx=0\Leftrightarrow x=1$ (ព្រោះ $x>0$)

បើ $f\,'(x)>0\Leftrightarrow 2x\ell nx>0\Leftrightarrow \ell nx>0\Leftrightarrow x>1$

បើ $f\,'(x)<0\Leftrightarrow 2x\ell nx<0\Leftrightarrow \ell nx<0\Leftrightarrow 0<x<1$

- បញ្ជាក់តម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x)$

បើ $x=1$ នោះតម្លៃអប្បបរមាគឺ $f(1)=\frac{1}{2}$

គ/ គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ell nx-\frac{x^2}{2}\right)=0 \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to 0^+} x^2\ell nx=0)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^2\ell nx-\frac{x^2}{2}\right)=\lim_{x\to +\infty} x^2\left(\ell nx-\frac{1}{2}\right)=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty}$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-0.5	↗ $+\infty$

• រកសមីការបន្ទាត់ d ប៉ះនឹងក្រាប C នៅត្រង់ចំណុច $A(2\ ,\ 4\ell n2-2)$ ។

$(d): y=f'(2)(x-2)+y_o$

ដោយ $f'(x)=2x\ell nx \Rightarrow f'(2)=4\ell n2$

$y_o=4\ell n2-2$

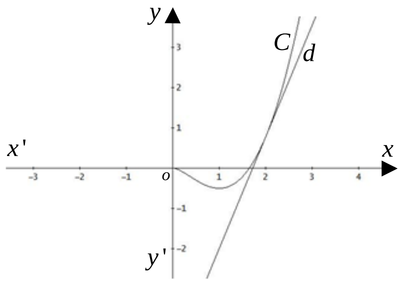
គេបាន $(d): y=4\ell n2(x-2)+4\ell n2-2$

$(d): y=(4\ell n2)x-8\ell n2+4\ell n2-2$

$(d): y=(4\ell n2)x-4\ell n2-2$

ដូចនេះ $\boxed{(d): y=(4\ell n2)x-4\ell n2-2}$

ឃ/ សង់ក្រាប C បន្ទាត់ប៉ះ d ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់



VIII. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យប្លង់

$(P): x+2y-z+5=0$ និងបន្ទាត់ $(d): \dfrac{x+3}{2}=y+1=z-3$

ក/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា (d) មិនស្របនឹង (P) ។

$(P): x+2y-z+5=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(1,2,-1)$

$(d): \dfrac{x+3}{2}=y+1=z-3$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{U}(2,1,1)$

$(P)//(d)$ លុះត្រាតែ $\vec{n}\perp\vec{U}$

តែ $\vec{n}\cdot\vec{U}=2+2-1=3\neq 0$ នោះ $\vec{n}$ មិនកែងនឹង $\vec{U}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (d) មិនស្របនឹងប្លង់ (P) ។

• រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាង (d) និង (P)

$$(d): \frac{x+3}{2}=y+1=z-3 \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=2t-3 \\ y=t-1 \\ z=t+3 \ , (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

យក $x=2t-3, y=t-1\ , z=t+3$ ជំនួសក្នុង $(P): x+2y-z+5=0$

គេបាន $(2t-3)+2(t-1)-(t+3)+5=0$

$$(2t-3)+2(t-1)-(t+3)+5=0$$

$$2t+2t-t-3-2-3+5=0$$

$$3t-3=0 \Rightarrow t=1$$

នាំឲ្យ $I: \begin{cases} x_o=-1 \\ y_o=0 \\ z_o=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{I(-1\ ,0\ ,4)}$

ខ/ កំណត់មុំ α ជាមុំផ្គុំដោយបន្ទាត់ (d) និង (P)

$$|\vec{n}\cdot\vec{U}|=\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{U}\|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{U}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{U}\|}$$

ដោយ $|\vec{n}\cdot\vec{U}|=3$

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$\|\vec{U}\|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{U}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{U}\|}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha=\frac{\pi}{3}}$

គ/ សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (d) ហើយកែងនឹង (P) ។

$$\vec{n}\times\vec{U}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$$

$I(-1\,,\,0\,,\,4)\in(d)$

ប្លង់ (Q) កាត់តាម $I(-1\,,\,0\,,\,4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}\times\vec{U}(3,-3,-3)$

គឺ $(Q):3(x+1)-3(y-0)-3(z-4)=0$

$(Q):3x-3y-3z+3+12=0$

$(Q):3x-3y-3z+15=0$

$(Q):x-y-z+5=0$

ដូចនេះ $\boxed{(Q):x-y-z+5=0}$

វិញ្ញាសាទី ១០

ត្រៀមប្រឡងយកសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១ - ២
ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍
ត្រៀមប្រឡងចូលរៀនពេទ្យ

I. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ell n\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$

ក/ រកដែនកំណត់នៃ f ។

ខ/ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស ។

គ/ បង្ហាញថា f អរិជ្ជមានលើចន្លោះ $[0\ ,\ 2]$ ។

II. គេឲ្យ f កំណត់លើ $\mathbb{C}$ ដោយ $f(Z)=Z^4-\sqrt{2}Z^3-4\sqrt{2}Z-16$

ក/ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $f(Z)=(Z^2+4)(Z^2+aZ+b)$ ។

ខ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(Z)=0$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ ។

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x<a\\[2mm] 1-\dfrac{1}{4}x & \text{បើ } x\geq a\end{cases}$

ក/ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ a ។

ខ/ តើ f មានដេរីវេត្រង់តម្លៃ a ដែលរកឃើញក្នុងសំនួរ(ក)ឬទេ ?

IV.1). គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

ក/ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}\cos 4x$ ។

ខ/ ទាញរកព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ដោយដឹងថា $F(\dfrac{\pi}{4})=1$ ។

2). គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+3y'+2y=\dfrac{x-1}{x^2}\cdot e^{-x}\qquad (E)$

ក/ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ $f(x)=e^{-x}\ell nx$ កំណត់លើ $]0,+\infty[$ ជាចម្លើយនៃ (E)

ខ/ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+3y'+2y=0$ (E') រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

V. រកក្រឡាផ្ទៃ S នៃប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង $2y=x^2+x+6$ និង $2y=-x^2+3x+6$ ។

VI. គេឲ្យអនុគមន៍កំណត់លើ $]0\ ,+\infty[$ ដោយ $g(x)=ax+b+\dfrac{\ell nx}{x}$ ។

កំណត់តម្លៃ a និង b ដោយដឹងថាខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច $A(1,0)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ g ត្រង់ A ស្របនឹងបន្ទាត់ $y=2x$ ។

VII.1). គេឲ្យអនុគមន៍ $\varphi(x)=e^x+x+1$ ។

ក/ គណនា $\varphi'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ ។

ខ/ បង្ហាញថា $\varphi(x)=0$ មានឫស α ដែល $-1.28\le\alpha\le-1.27$ ។

គេឲ្យ $\varphi(-1.28)\approx-1.96\cdot10^{-3}$, $\varphi(-1.27)=-1.08\cdot10^{-2}$ ។

គ/ ទាញរកសញ្ញានៃ $\varphi(x)$ ។

2). f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$ មានក្រាប (C) ។ ដោយប្រើលទ្ធផលសំនួរទី១ ៖

ក/ បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព

ខ/ បង្ហាញថា $f(\alpha)=\alpha+1$ ទាញរកតម្លៃអម $f(\alpha)$ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_o=0$ ។ សិក្សាទីតាំងរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ ។

គ/ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D):y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ ។

VIII. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i}\ ,\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(4,2,3)$, $B(-2,1,-1)$, $C(3,8,7)$ និង $D(-6,2,z)$ ។

ក/ កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{N}=\vec{AB}\times\vec{AC}$ ។ រកតម្លៃ z ដើម្បីឲ្យចំណុចទាំងបួនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។

ខ/ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) រួចទាញរកក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC ព្រមទាំងបញ្ជាក់ប្រភេទត្រីកោណ ΔABC ។

គ/ កំណត់តម្លៃ z ដើម្បីឲ្យ ΔABD ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B ។

ចម្លើយ

I. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ell n\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$

ក/ រកដែនកំណត់នៃ f

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}\dfrac{3-x}{3+x}>0\\ 3+x\neq 0\end{cases}$ $(*)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(*)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow x\in\,]-3,3[$

ដូចនេះ ដែនកំណត់របស់អនុគមន៍ f គឺ $\boxed{D=]-3,3[}$

ខ/ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\ell n\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$

គេបាន

$$f(-x)=\ell n\left(\frac{3-(-x)}{3+(-x)}\right)=\ell n\left(\frac{3+x}{3-x}\right)=\ell n\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}$$

$$=-\ell n\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=-f(x)$$

ដោយ $f(-x)=-f(x)$ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស ។

គ/ បង្ហាញថា f អវិជ្ជមានលើចន្លោះ $[0\ ,\ 2]$

$$f(x)=\ell n\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=\ell n(3-x)-\ell n(3+x)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{3-x}-\frac{1}{3+x}=\frac{-3-x-3+x}{(3-x)(3+x)}=-\frac{6}{(3-x)(3+x)}$$

ដោយ $-\dfrac{6}{(3-x)(3+x)}<0\ ,\ \forall x\in D$ នោះ $f'(x)<0\ ,\ \forall x\in D$

នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច ចំពោះ $\forall x\in D$

នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច ចំពោះ $\forall x\in[0,2]$

ចំពោះ $x\in[0,2]$ គេបាន $f(0)=0\ ,\ f(2)=\ell n\left(\dfrac{1}{5}\right)=-\ell n5$

គេបាន $f(x)\le 0$ ចំពោះ $x\in[0,2]$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f អវិជ្ជមានលើចន្លោះ $[0\ ,\ 2]$ ។

II. គេឲ្យ f កំណត់លើ $\mathbb{C}$ ដោយ $f(Z)=Z^4-\sqrt{2}Z^3-4\sqrt{2}Z-16$

ក/ កំណត់ចំនួនពិត a និង b

$$\begin{aligned}f(Z)&=(Z^2+4)(Z^2+aZ+b)\\&=Z^4+aZ^3+bZ^2+4Z^2+4aZ+4b\\&=Z^4+aZ^3+(b+4)Z^2+4aZ+4b\end{aligned}$$

តែ $f(Z)=Z^4-\sqrt{2}Z^3-4\sqrt{2}Z-16$

នាំឲ្យ $\begin{cases}a=-\sqrt{2}\\ b+4=0\\ 4a=-4\sqrt{2}\\ 4b=-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\sqrt{2}\\ b=-4\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-\sqrt{2}\ ,\ b=-4}$

ខ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(Z)=0$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$

$$(Z^2+4)(Z^2-\sqrt{2}Z-4)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} Z^2+4=0 \ \Rightarrow Z=\pm 2i \\ Z^2-\sqrt{2}Z-4=0 \end{array}\right.$$

ចំពោះ $Z^2-\sqrt{2}Z-4=0$

$$\Delta=(-\sqrt{2})^2+16=2+16=18$$

$$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{18}}{2}=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{18}}{2}=\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\{-2i\ ,\ 2i,-\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\}}$

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{បើ } x<a \\ 1-\dfrac{1}{4}x & \text{បើ } x\geq a \end{cases}$

ក/ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ a

គេមាន $f(a)=1-\dfrac{1}{4}a$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\dfrac{1}{a}$ និង $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=1-\dfrac{1}{4}a$

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ a លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

គេបាន $1-\dfrac{1}{4}a=\dfrac{1}{a}\Rightarrow 4a-a^2=4$, $(a\neq 0)$

$$a^2-4a+4=0\Leftrightarrow (a-2)^2=0\Leftrightarrow a=2$$

ដូចនេះ $\boxed{a=2}$

ខ/ តើ f មានដេរីវេត្រង់តម្លៃ a ដែលរកឃើញក្នុងសំនួរ(ក)ឬទេ ?

ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $a=2$ កាលណា $f_+^{'}(2)=f_-^{+}(2)$

គេមានៈ

$$f_+^{'}(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}}{x-2}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=-\frac{1}{4}$$

$$f_-^{'}(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{2x(x-2)}$$

$$=-\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2x}=-\frac{1}{4}$$

គេឃើញថា $f_+^{'}(2)=f_-^{+}(2)=-\frac{1}{4}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់តម្លៃ $a=2$ ។

IV.1). គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

ក/ បង្ហាញថា $f(x)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$

គេមាន $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x}$

ខ/ ទាញរកព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x\,dx$$

$$F(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

ដោយដឹងថា $F(\frac{\pi}{4})=1$

គេបាន $\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{32}\sin 4\left(\frac{\pi}{4}\right)+C=1$

$$\frac{\pi}{32}+C=1\Rightarrow C=1-\frac{\pi}{32}$$

នាំឲ្យ $F(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+1-\frac{\pi}{32}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+1-\frac{\pi}{32}}$

2). គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}\cdot e^{-x} \quad (E)$

ក/ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ $f(x)=e^{-x}\ell nx$ កំណត់លើ $]0,+\infty[$ ជាចម្លើយនៃ (E)

$$\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}\ell nx+\frac{1}{x}e^{-x}=\left(\frac{1}{x}-\ell nx\right)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}-\left(\frac{1}{x}-\ell nx\right)e^{-x}=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\ell nx\right)e^{-x}$$

យក $f(x)$, $f'(x)$ & $f''(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E) គេបាន:

$$y''+3y'+2y=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\ell nx\right)e^{-x}+3\left(\frac{1}{x}-\ell nx\right)e^{-x}+2e^{-x}\ell nx$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\ell nx+\frac{3}{x}-3\ell nx+2\ell nx\right)e^{-x}$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^{-x}=\frac{-1+x}{x^2}\cdot e^{-x}=\frac{x-1}{x^2}\cdot e^{-x} \text{ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)}$$

ដូចនេះ $f(x)=e^{-x}\ell nx$ កំណត់លើ $]0,+\infty[$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ខ/ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+3y'+2y=0 \ (E')$

សមីការសម្គាល់ $r^2+3r+2=0 \Leftrightarrow (r+1)(r+2)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r+1=0 \Rightarrow r=-1 \\ r+2=0 \Rightarrow r=-2 \end{array}\right.$$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃ (E') គឺ $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$ ដែល A & B ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ $\boxed{y=Ae^{-x}+Be^{-2x} \ , (A,B\in\mathbb{R})}$

• ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

$g(x)=f(x)+y=e^{-x}\ell nx+Ae^{-x}+Be^{-2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=e^{-x}\ell nx+Ae^{-x}+Be^{-2x}, (A,B\in\mathbb{R})}$

V. រកក្រឡាផ្ទៃ S នៃប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង $2y = x^2 + x + 6$ និង

$2y = -x^2 + 3x + 6$ ។

សមីការអាប់ស៊ីស $x^2 + x + 6 = -x^2 + 3x + 6$

$$2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \; , \; x = 1$$

គេបាន $S = \left| \int_0^1 [(x^2 + x + 6) - (-x^2 + 3x + 6)]\, dx \right|$

$$= \left| \int_0^1 (2x^2 - 2x)\, dx \right| = \left| \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 \right)_0^1 \right| = \left| \frac{2}{3} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{S = \frac{1}{3} \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}}$

VI. កំណត់តម្លៃ a និង b

គេមាន $g(x) = ax + b + \frac{\ell nx}{x}$ កំណត់លើ $]0 \, , +\infty[$

$$\Rightarrow g'(x) = a + \frac{1 - \ell nx}{x^2}$$

ដោយដឹងថាខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច $A(1,0)$ គេបាន $g(1) = 0$ ឬ $a + b = 0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ g ត្រង់ A ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = 2x$

គេបាន $g'(1) = 2 \Leftrightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$

យក $a = 1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $b = -1$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1 \, , \, b = -1}$

VII.1). គេឲ្យអនុគមន៍ $\varphi(x) = e^x + x + 1$

ក/ គណនា $\varphi'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។

$\varphi'(x) = e^x + 1$

ដោយ $e^x + 1 > 0 \, , \forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $\varphi'(x) > 0 \; , \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x) = e^x + 1$	$+$

• គណនាលីមីត $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ និង $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x+x+1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x+x+1)=-\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=-\infty}$

ខ/ បង្ហាញថា $\varphi(x)=0$ មានឫស α ដែល $-1.28\le\alpha\le-1.27$

គេឲ្យ $\varphi(-1.28)\approx-1.96\cdot10^{-3}$, $\varphi(-1.27)=-1.08\cdot10^{-2}$

គេបាន $\varphi(-1.28)\cdot\varphi(-1.27)=-2,1168\cdot10^{-5}<0$

ដោយ $\varphi(-1.28)\cdot\varphi(-1.27)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា

មានឫស α យ៉ាងតិចមួយធ្វើឲ្យ $\varphi(\alpha)=0$ ដែល $-1.28\le\alpha\le-1.27$

ដូចនេះ បង្ហាញថា $\varphi(\alpha)=0$ មានឫស α ដែល $-1.28\le\alpha\le-1.27$ ។

គ/ ទាញរកសញ្ញានៃ $\varphi(x)$

បើ $\varphi(x)<0$, $\forall x<\alpha$

បើ $\varphi(x)\ge0$, $\forall x\ge\alpha$

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$\varphi(x)=e^x+x+1$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

2). f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$ មានក្រាប (C) ។ ដោយប្រើ

លទ្ធផលសំនួរទី១ ៖

ក/ បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x+1)-xe^xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(1+x)(e^x+1)-xe^xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x(e^x+1+xe^x+x-xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$$

ដូចនេះ បង្ហាញថា $\boxed{f'(x)=\dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}}$

ដោយ $e^x>0$, $(e^x+1)^2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\varphi(x)$ ។

បើ $f(x)=0$ នោះ $\varphi(x)=0$ មានឫស α ដែល $-1.28\le\alpha\le-1.27$

• លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x+1}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

• សង់តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$

ខ/ បង្ហាញថា $f(\alpha)=\alpha+1$

គេមាន $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}=\dfrac{xe^x+x+e^x+1-e^x-x-1}{e^x+1}$

$$=\frac{(x+1)(e^x+1)-(e^x+x+1)}{e^x+1}=x+1-\frac{\varphi(x)}{e^x+1}$$

គេបាន $f(\alpha)=\alpha+1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{e^\alpha+1}$

ដោយ $\varphi(\alpha)=0$ (តាមសំនួរ1)

នាំឲ្យ $\dfrac{\varphi(\alpha)}{e^\alpha+1}=0$ ដូច្នេះ $f(\alpha)=\alpha+1$

ដូចនេះ $\boxed{f(\alpha)=\alpha+1}$

• ទាញរកតម្លៃអម $f(\alpha)$

ដោយ $-1.28\le\alpha\le-1.27$

$-1-0.28 \le \alpha \le -1-0.27$

$1-1-0.28 \le \alpha+1 \le 1-1-0.27$

$-0.28 \le \alpha+1 \le -0.27$

$-0.28 \le f(\alpha) \le -0.27$

ដូចនេះ $\boxed{-0.28 \le f(\alpha) \le -0.27}$

• សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_o = 0$

តាមរូបមន្ត $(T): y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ តែ ($x_o = 0$)

$$(T): y = f'(0)(x) + f(0)$$

ដោយ $f'(0) = \frac{1}{2}$ និង $f(0) = 0$

គេបាន $(T): y = \frac{1}{2}(x) + 0 = \frac{1}{2}x$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(T): y = \frac{1}{2}x}$

• សិក្សាទីតាំងរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់

$$(C): f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1} \ , \ (T): \ y = \frac{1}{2}x$$

យក $f(x) - y = \frac{xe^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}x = \frac{2xe^x - xe^x - x}{2(e^x+1)} = \frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$

$-$បើ $x = 0$ នាំឲ្យ $f(x) - y = 0$ នោះ $(C) \cap (T)$ ត្រង់ $x = 0$

$-$បើ $x > 0$ នាំឲ្យ $f(x) - y > 0$ នោះក្រាប (C) នៅខាងលើបន្ទាត់ (T)

$-$បើ $x < 0$ នាំឲ្យ $f(x) - y > 0$ នោះក្រាប (C) នៅខាងលើបន្ទាត់ (T)

គ/ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

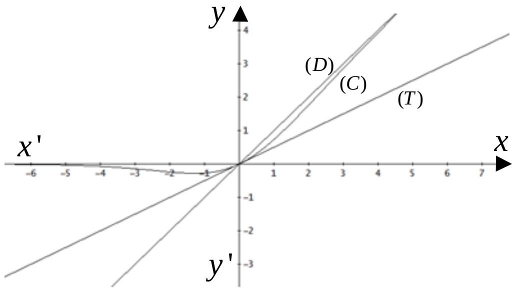
បើ $(D): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - y] = 0$

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x - xe^x - x}{e^x+1}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x+1}\right) = 0 \quad \text{(ផ្ទៀងផ្ទាត់)}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T)



VIII. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច $A(4,2,3)$, $B(-2,1,-1)$, $C(3,8,7)$ និង $D(-6,2,z)$ ។

ក/ កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{N} = \vec{AB}\times\vec{AC}$

គេមាន $\vec{AB}(-6,-1,-4)$, $\vec{AC}(-1,6,4)$, $\vec{BD}(-4,1,z+1)$

គេបាន $\vec{N} = \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 20\vec{i} + 28\vec{j} - 37\vec{k}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{N} = \vec{AB}\times\vec{AC}(20,28,-37)}$

• រកតម្លៃ z ដើម្បីឲ្យចំណុចទាំងបួនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ

ដើម្បីឲ្យ A,B,C,D ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយលុះត្រាតែ $\vec{BD}\cdot(\vec{AB}\times\vec{AC}) = 0$

$-4(20)+1(28)+(z+1)(-37) = 0$

$-80+28-37z-37 = 0$

$-37z-89 = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{89}{37}$

ដូចនេះ $\boxed{z = -\dfrac{89}{37}}$

ខ/ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) កាត់តាម $A(4,2,3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{N}(20,28,-37)$

គេបាន $(ABC):20(x-4)+28(y-2)-37(z-3)=0$

$(ABC):20x+28y-37z-80-56+111=0$

$(ABC):20x+28y-37z-25=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC):20x+28y-37z-25=0}$

- ទាញរកក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{20^2+28^2+(-37)^2}}{2}=\frac{\sqrt{400+784+1369}}{2}=\frac{\sqrt{2553}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{2553}}{2}\text{(ឯកតាផ្ទៃ)}}$

- បញ្ជាក់ប្រភេទត្រីកោណ ΔABC

គេមាន $\|\vec{AB}\|=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{53}$

$\|\vec{AC}\|=\sqrt{(-1)^2+6^2+4^2}=\sqrt{53}$

ក្នុង ΔABC មាន $AB=AC=\sqrt{53}$

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

គ/ កំណត់តម្លៃ z

ដើម្បីឲ្យ ΔABD ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B កាលណា $AB=BD$

គេមាន $AB=\sqrt{53}$ និង $BD=\sqrt{(-4)^2+1^2+(z+1)^2}=\sqrt{(z+1)^2+17}$

គេបាន $\sqrt{(z+1)^2+17}=\sqrt{53}$

$z^2+2z+1+17=53\Leftrightarrow z^2+2z+18-53=0$

$z^2+2z-35=0\Leftrightarrow(z-5)(z+7)=0$

$\Rightarrow z=5\ ,\ z=-7$

ដូចនេះ $\boxed{z=5\ ,\ z=-7}$

លំហាត់

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ មានក្រាបតំណាង C ។

ក/ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ដោយបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត ។

ខ/ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង C និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C រួចសង់ខ្សែកោង C នេះ ។

គ/ ដោយប្រើក្រាភិចសិក្សាអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $mx^2+2(m-1)x-(3m+2)=0$ ។

ចម្លើយ

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ មានក្រាបតំណាង C

ក/ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ដោយបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត

- ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+2x-3\neq 0$

បើ $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}}$

- ទិសដៅអថេរភាព

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2x-3)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x-6-4x^2-8x-4}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2}$$

ដោយ $(x^2+2x-3)^2>0\ ,\forall x\in D$

នាំឲ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x^2-4x-10$ ។

បើ $f'(x)=0\ ,\ -2x^2-4x-10=0$

$\Delta'=(-2)^2-20=-16<0$ សមីការគ្មានឫស

នាំឲ្យ $f'(x)<0$ ជានិច្ចគ្រប់ $x\in D$ ។

- លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=0$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=\frac{4}{0}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=\frac{-6+2}{0}=\pm\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f ។

ដោយ $\lim_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim_{x\to-3} f(x)=\pm\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=1$, $x=-3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f ។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

ខ/ រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្សអាបស៊ីស

សមីការអាប់ស៊ីស $y=0$, $\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=0\Rightarrow 2x+2=0\Rightarrow x=-1$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំនុច I គឺ $\boxed{I(-1,0)}$ ។

• បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C

បើ I ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែចំណុច $I(-1,0)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$f(2a-x)+f(x)=2b$ ឬ $f(-2-x)+f(x)=0$ (ព្រោះ $a=-1$, $b=0$)

គណនា $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{2(-2-x)+2}{(-2-x)^2+2(-2-x)-3}+f(x)$

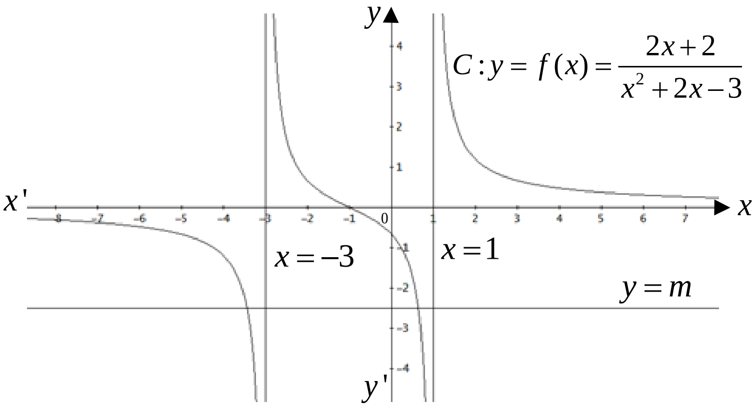
$$=\frac{-4-2x+2}{4+4x+x^2-4-2x-3}+f(x)=\frac{-2x-2}{x^2+2x-3}+\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=0 \text{ (ពិត)}$$

ដូចនេះ ចំណុច $I(-1,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C ។

• សង់ខ្សែកោង C

រក $C\cap(x\acute{o}x):\ y=0\Rightarrow x=-1$

រក $C\cap(y\acute{o}y):x=0\Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}$



គ/ ប្រើក្រាភិចសិក្សាអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសនៃសមីការ

$$mx^2+2(m-1)x-(3m+2)=0$$

$$mx^2+2mx-2x-3m-2=0$$

$$mx^2+2mx-3m=2x+2$$

$$m(x^2+2x-3)=2x+2$$

$$\Rightarrow m=\frac{2x+2}{x^2+2x-3}$$

តាង $y=m$ ជាបន្ទាត់ចល័តលើអ័ក្ស $\vec{oy}$

<u>សិក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫស</u>

• ចំពោះ $m\in]-\infty,-\dfrac{2}{3}[$ សមីការមានឫស $x_1<0<x_2$

• ចំពោះ $m=-\dfrac{2}{3}$ សមីការមានឫស $x_1<x_2=0$

• ចំពោះ $m\in]-\dfrac{2}{3}\,,0[$ សមីការមានឫស $x_1<x_2<0$

- ចំពោះ $m=0$ សមីការមានឫស $x=-1$
- ចំពោះ $m\in]0,+\infty[$ សមីការមានឫស $x_1<0<x_2$ ។

លំហាត់

f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{\ell n(1+e^x)}{e^x}$ មានក្រាប C ។

ក/ គណនា $f'(x)$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា $f'(x)$ យកសញ្ញាដូចអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)$ ។

ខ/ គណនា $g'(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ ។ សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ $g(x)$ ។ ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

គ/ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។ សង់ក្រាប C របស់អនុគមន៍ f ។

ឃ/ កំណត់តម្លៃចំនួនពិត a និង b ដែលគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$:

$\dfrac{1}{1+e^x}=a+\dfrac{be^x}{1+e^x}$ រួចទាញរក $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$ ។

ចម្លើយ

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{\ell n(1+e^x)}{e^x}$ មានក្រាប C

ក/ គណនា $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{\frac{e^x}{1+e^x}\cdot e^x-e^x\ell n(1+e^x)}{e^{2x}}=\frac{\frac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)}{e^x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{\frac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)}{e^x}}$

- ទាញបញ្ជាក់ថា $f'(x)$ យកសញ្ញាដូចអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)}{e^x}$

ដោយ $e^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)$

តែ $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)$ ដូច្នេះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាមអនុគមន៍ g ។

ខ/ គណនា $g'(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$

$$g'(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^xe^x}{(1+e^x)^2}-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x+e^{2x}-e^{2x}-e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$=-\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x)=-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}}$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x}-\ell n(1+e^x)\right]=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0}$

• សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ $g(x)$ ។

ដោយ $g'(x)=-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ g ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

• ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

តាមតារាងខាងលើ $g(x)<0$ នាំឲ្យ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

គ/ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell n(1+e^x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell ne^x\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell ne^x+\ell n\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ell n\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n(1+e^x)}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\ell n(1+e^x)^{\frac{1}{e^x}}=\ell ne=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=1}$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

នាំឲ្យ $y=0$ និង $y=1$ ជាបន្ទាត់អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

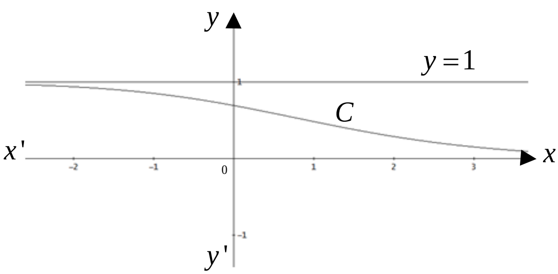
ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ និង $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f ។

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

• សង់ក្រាប C របស់អនុគមន៍ f

រក $C\cap(y\acute{o}y): x=0\ ,\ y=\ell n2$



ឃ/ កំណត់តម្លៃចំនួនពិត a និង b ដែលគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{1+e^x}=a+\dfrac{be^x}{1+e^x}$

គេមាន $\dfrac{1}{1+e^x}=a+\dfrac{be^x}{1+e^x}=\dfrac{a(1+e^x)+be^x}{1+e^x}=\dfrac{(a+b)e^x+a}{1+e^x}$

គេទាញបាន $\begin{cases}a+b=0\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\,,\,b=-1}$

• ទាញរក $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\Big[x-\ell n(1+e^x)\Big]_0^1$$

$$=[1-\ell n(1+e)]-[0-\ell n(1+1)]$$

$$=1-\ell n(1+e)+\ell n(2)=1+\ell n\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=1+\ell n\left(\frac{2}{1+e}\right)}$

សូមជូនពរឲ្យទទួលបានជោគជ័យក្នុងការប្រឡង !